

Diferentes Abordagens ao Estudo das Cónicas

Mário César Ludgero Fernandes Correia

Dissertação de Mestrado apresentada à

Faculdade de Ciências da Universidade do Porto em

Matemática

2013



Diferentes Abordagens ao Estudo das Cónicas

Mário César Ludgero Fernandes Correia

Mestrado em Matemática para Professores

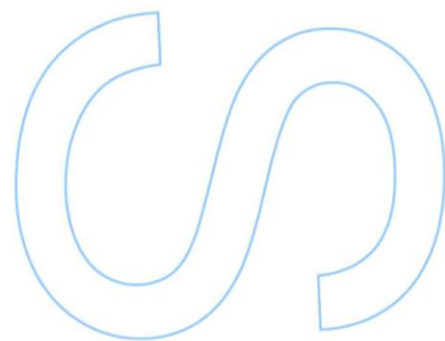
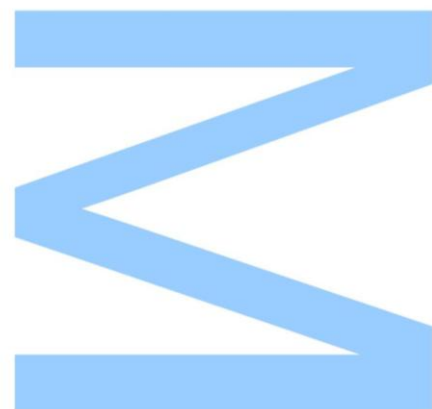
Departamento de Matemática

2013

Orientador

Maria do Rosário Machado Lema Sinde Pinto,

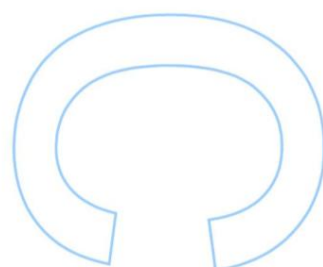
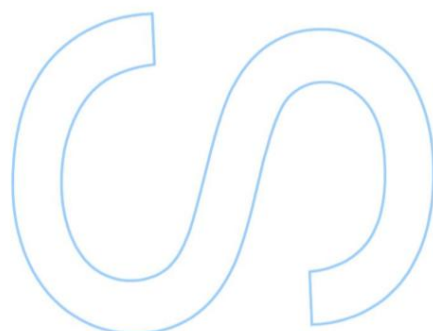
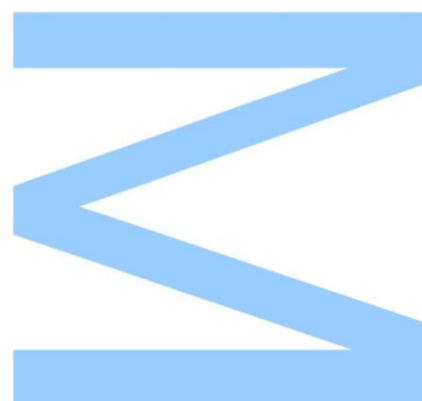
Professora Auxiliar da Faculdade de Ciências da
Universidade do Porto



Todas as correções determinadas
pelo júri, e só essas, foram efetuadas.

O Presidente do Júri,

Porto, ____/____/____



Agradecimentos

À minha família que soube compreender pacientemente, as ausências.

À Dra. Maria do Rosário Pinto pelos insistentes estímulos ao trabalho facultando-me excelentes sugestões bibliográficas, para além, claro, da prontidão que manifestou em todas as solicitações que lhe foram feitas.

Resumo

Neste trabalho faz-se quatro abordagens ao estudo das cónicas, Abordagem Sintética, Abordagem Analítica, Abordagem Projetiva e Abordagem Didática. Na Abordagem Sintética, dá-se ênfase aos aspetos históricos, com destaque para os seus protagonistas – Menecmo, com a descoberta das cónicas nas tentativas de resolução dos problemas de incomensurabilidade, Apolónio, com a criação do melhor cone para a definição dos sintomas de uma cónica, e Dandelin, com a localização geométrica, exata, dos focos e da diretriz.

Na Abordagem Analítica, as linhas cónicas são definidas por equações do segundo grau, e por equações em coordenadas polares. São também enunciadas, proposições referentes às tangentes para as três cónicas.

Na Abordagem Projetiva, faz-se o estudo das cónicas, seguindo as teorias da Geometria Projetiva. Destacam-se os contributos de Desargues e de Steiner na concretização das cónicas, em contexto projetivo.

A Abordagem Didática, encerra o trabalho coletando o essencial dos elementos lúdicos, respeitantes aos aparatos de construção das cónicas e ao seu vasto leque de aplicações, para planejar ações didáticas motivadoras, para os alunos.

Palavras-chave:

Cónicas, Geometria Sintética, Geometria Analítica, Geometria Projetiva, Didática.

Abstract

In this work four approaches to the study of the conics are done: Synthetic Approach, Analytical Approach, Projective Approach and Didactic Approach. In the Synthetic Approach, the emphasis is put in the historical aspects, highlighting its protagonists - Menecmo, with the discovery of conics in attempts to resolve the problems of incommensurability, Apollonius, with the creation of the best cone to define the symptoms of a conic, and Dandelin with the exact geometric location of the focus and directrix.

In the Analytical Approach, the conics' lines are defined by quadratic equations, and equations in polar coordinates. Propositions concerning tangents to the three conics are also listed.

In the Projective Approach, a study of the conics is done, following the theories of the Projective Geometry. Here the contributions of Desargues and Steiner in the implementation of the conics, in the projective context, are enlightened.

To conclude, the Didactic Approach collects the essential of the playful elements, concerning the construction of conical apparatus and its wide range of applications to plan teaching actions that motivate students.

Keywords:

Conics, Synthetic Geometry, Analytic Geometry, Projective Geometry, Didactics.

Índice

Agradecimentos.....	i
Resumo	ii
Abstract	iii
Índice	iv
Índice de figuras.....	vi
Introdução	1
Capítulo 1: Abordagem sintética das cónicas	4
1.1. Os primeiros gregos: Menecmo, Euclides, Arquimedes e Pappus	4
1.2. Apolónio de Perga	9
1.2.1. O homem e a sua obra	9
1.2.2. O cone segundo Apolónio	9
1.2.3. As secções cónicas segundo Apolónio	10
1.2.3.1. O sintoma da parábola	13
1.2.3.2. O sintoma da elipse	15
1.2.3.3. O sintoma da hipérbole	18
1.2.4. Análise de algumas outras características abordadas por Apolónio.....	19
1.2.4.1. Tangentes e normais às cónicas	19
1.2.4.2. Focos e suas propriedades	21
1.3. As esferas de Dandelin	22
1.3.1. Determinação das secções cónicas	23
1.3.2. A origem dos focos de uma cónica	27
1.3.3. A origem das diretrizes de uma cónica	29
1.3.4. A excentricidade de uma cónica	30
1.3.5. Os fundamentos da definição focal das cónicas	32
Capítulo 2: Abordagem analítica das cónicas	35
2.1. Equação cartesiana geral de uma cónica	35
2.1.1. Equação da parábola	38
2.1.2. Equação da elipse	39
2.1.3. Equação da hipérbole	41
2.2. Identificação e classificação das cónicas a partir de uma equação do 2.º grau	43
2.2.1. Discussão da equação geral das cónicas	43
2.2.2. O processo de redução da equação geral das cónicas	44
2.2.2.1. O processo de translação dos eixos coordenados	45
2.2.2.2. O processo de rotação dos eixos coordenados	46

2.2.3. Identificação das cónicas	50
2.3. Equações das cónicas em coordenadas polares	51
2.4. Quádricas de revolução – breve referência	54
2.5. Retas tangentes a uma cónica	57
Capítulo 3: Abordagem projetiva das cónicas.....	61
3.1. As origens da Geometria Projetiva	61
3.2. O contributo de Desargues na simplificação das teorias de Apolónio acerca das cónicas	65
3.3. Geometria Projetiva, um caminho para o estudo das cónicas	74
3.3.1. Os elementos da Geometria Projetiva: Termos e conceitos primitivos, e o essencial das definições e teoremas	74
3.3.2. Polaridades	84
3.4. Cónicas, uma definição projetiva	86
3.4.1. Definição de cónica	86
3.4.2. Construção de cónicas em contexto projetivo	87
3.5. Teoremas emblemáticos sobre as cónicas em contexto projetivo	91
Capítulo 4: Abordagem didática das cónicas	93
4.1. Uma homenagem a Coménio, o alegado “pai” da Didática Moderna	93
4.2. A importância da história	94
4.3. Alguns aparatos de construção das cónicas.....	96
4.3.1. Método do jardineiro	96
4.3.2. Mecanismo de Van Schooten	96
4.3.3. Método Danny Viscaino e Joseph Carnoy	97
4.3.4. Traçado da parábola com uma régua em forma de T	98
4.3.5. O método das dobragens	98
4.3.5.1. Construção da parábola	99
4.3.5.2. Construção da elipse	99
4.3.5.3. Construção da hipérbole	101
4.4. As aplicações das cónicas como valor motivacional para o ensino	102
4.4.1. Superfícies refletoras parabólicas	105
4.4.2. Superfícies refletoras elípticas	105
4.4.3. Superfícies refletoras hiperbólicas	107
4.4.4. A hipérbole e o Sistema LORAN de comunicações	109
4.5. Elaboração de um plano de aula para lecionar a matéria: Construção das cónicas pelo método das dobragens	111
Epílogo	116
Bibliografia	117

Índice de figuras

Capítulo1: Abordagem sintética das cónicas

Fig.1.1 - Os três problemas clássicos da Matemática Grega	5
Fig.1.2 - Representação dos meios proporcionais de a e $2a$	5
Fig.1.3 - A solução gráfica do problema da duplicação do cubo	5
Fig.1.4 - Construção de uma parábola ponto a ponto, aplicando o método euclidiano	6
Fig.1.5 - Classificação do cone em termos do ângulo do vértice	7
Fig.1.6 - As secções por um plano perpendicular a uma geratriz	7
Fig.1.7 - Cónicas segundo Pappus.....	8
Fig.1.8 - O cone segundo Apolónio	9
Fig.1.9 - O duplo cone ou cone de duas folhas segundo Apolónio	10
Fig.1.10 - Cone oblíquo	10
Fig.1.11 - Secções do cone por planos arbitrários	11
Fig.1.12 - Esquema geral para deduzir os sintomas das linhas cónicas	12
Fig.1.13 - Potência de um ponto em relação a uma circunferência	13
Fig.1.14 - Dedução do sintoma da parábola	14
Fig.1.15 - Corte transversal segundo o plano axial (parábola)	14
Fig.1.16 - Dedução do sintoma da elipse	16
Fig.1.17 - Corte transversal segundo o plano axial (elipse)	17
Fig.1.18 - Dedução do sintoma da hipérbole	18
Fig.1.19 - Tangente à parábola segundo Apolónio (Proposição I-33)	20
Fig.1.20 - Tangente à elipse e à hipérbole segundo Apolónio (Proposição I-34)	20
Fig.1.21 - Normal a uma cónica segundo Apolónio (Proposição V-8, V-13, V-27)	21
Fig.1.22 - Abordagem de Dandelin ao cone	23
Fig.1.23 - Posicionamento do plano secante relativamente ao cone	24
Fig.1.24 - Hipérbole	24
Fig.1.25 - Hipérbole degenerada em duas linhas	25
Fig.1.26 - Parábola	25
Fig.1.27 - Parábola degenerada numa linha	26
Fig.1.28 - Elipse	26
Fig.1.29 - Elipse degenerada num ponto	27
Fig.1.30 - Perspetiva tridimensional e perspetiva segundo corte transversal, das esferas de Dandelin relativos à elipse e à hipérbole	28
Fig.1.31 - Perspetiva tridimensional e perspetiva segundo corte transversal das esferas de Dandelin relativos à parábola	29

Fig.1.32 - Diretriz d de uma cónica	29
Fig.1.33 - Esquema da excentricidade	31
Fig.1.34 - Variação da excentricidade e as cónicas	31
Fig.1.35 - “Sintoma” da elipse segundo Dandelin (Tridimensionalmente e segundo corte transversal)	32
Fig.1.36 - “Sintoma” da hipérbole segundo Dandelin (Tridimensionalmente e segundo corte transversal)	33
Fig.1.37 - Sintoma da parábola segundo Dandelin. (Tridimensionalmente e segundo corte transversal)	34
Capítulo 2: Abordagem analítica das cónicas	
Fig.2.1 - Cónica num determinado referencial	37
Fig.2.2 - Parábola num referencial cartesiano	38
Fig.2.3 - Elipse num referencial cartesiano	39
Fig.2.4 - Hipérbole num referencial cartesiano	42
Fig.2.5 - Translação de eixos	45
Fig.2.6 - Rotação de eixos	46
Fig.2.7 - Translação e rotação dos eixos coordenados na redução de equações	49
Fig.2.8 - Sistema de coordenadas polares	51
Fig.2.9 - Relação entre coordenadas polares e cartesianas	52
Fig.2.10 - Diretriz perpendicular ao eixo polar	53
Fig.2.11 - Diretriz paralela ao eixo polar	54
Fig.2.12 - Paraboloide de revolução.....	55
Fig.2.13 - Elipsoide de revolução	56
Fig.2.14 - Hiperboloide de revolução	56
Fig.2.15 - Secantes e tangente a uma cónica	57
Fig.2.16 - Tangente a uma parábola	58
Fig.2.17 - Tangente a uma elipse	59
Fig.2.18 - Tangente a uma hipérbole	60
Capítulo 3: Abordagem projetiva das cónicas	
Fig.3.1 - Vista harmoniosa de uma distribuição caótica	61
Fig.3.2 - Projeção de uma circunferência numa elipse	62
Fig.3.3 - Detalhe da perspetiva utilizada por Leonardo da Vinci no quadro “A Última Ceia”	63
Fig.3.4 - Imagem do ponto no infinito nos carris dos comboios	64
Fig.3.5 - Projeções de um círculo sobre um plano	64
Fig.3.6 - Os pontos de fuga são pontos no infinito	65
Fig.3.7 - A secção cónica de Apolónio vista por Desargues	66

Fig.3.8 - Imagem da involução de quatro pontos	67
Fig.3.9 - Imagem da involução de quatro pontos (2)	68
Fig.3.10 - Imagem da involução de quatro pontos (3)	68
Fig.3.11 - Polaridade segundo Desargues	69
Fig.3.12 - Proposição 129 da coleção de Pappus	70
Fig.3.13 - Demonstração da Proposição 129 da coleção de Pappus	70
Fig.3.14 - Demonstração da Proposição 129 da coleção de Pappus (2)	71
Fig.3.15 - Demonstração de polaridade	72
Fig.3.16 - Invariância projetiva	74
Fig.3.17 - União de pontos e interseção de linhas	75
Fig.3.18 - Pontos colineares e retas concorrentes	76
Fig.3.19 - Lado, triângulo, ponto e trilátero	76
Fig.3.20 - Vértices de um quadrângulo	77
Fig.3.21 - União de pontos e interseção de linhas a partir dos vértices de um quadrângulo	78
Fig.3.22 - Lados de um quadrilátero	78
Fig.3.23 - União de pontos e interseção de linhas a partir dos lados de um quadrilátero	79
Fig.3.24 - Feixe de retas P e fileira de pontos r	80
Fig.3.25 - Correspondência elementar	80
Fig.3.26 - Projetividade	81
Fig.3.27 - Perspetividade	82
Fig.3.28 - Perspetividade de dois triângulos (Teorema de Desargues)	83
Fig.3.29 - Teorema de Pappus	83
Fig.3.30 - A polaridade preserva incidências	85
Fig.3.31 - A polaridade dualiza incidências	85
Fig.3.32 - Cónica como figura auto-dual	86
Fig.3.33 - Relação projetiva entre dois feixes de retas (Steiner)	87
Fig.3.34 - Cónica de Steiner	88
Fig.3.35 - Imagem da elipse como “cónica ponto”	88
Fig.3.36 - Imagem da parábola como “cónica ponto”	89
Fig.3.37 - Imagem da hipérbole como “cónica ponto”	89
Fig.3.38 - Relação projetiva entre duas fileiras de pontos	90
Fig.3.39 - Imagem da parábola como “cónica linha”	90
Fig.3.40 - Imagem da elipse como “cónica linha”	91
Fig.3.41 - Imagem da hipérbole como “cónica linha”	91
Fig.3.42 - Teorema de Pascal	92
Fig.3.43 - Teorema de Brianchon	92

Capítulo 4: Abordagem didática das cónicas

Fig.4.1 - Definições focais das cónicas	95
Fig.4.2 - Construção da elipse pelo método de jardineiro	96
Fig.4.3 - Construção da elipse segundo o Mecanismo de Van Schooten	97
Fig.4.4 - Construção da elipse segundo D. Viscaïno e J. Carnoy	97
Fig.4.5 - Construção da parábola utilizando uma régua em forma de T	98
Fig.4.6 - Reta tangente à parábola como vinco de uma dobragem.....	99
Fig.4.7 - Imagem da parábola construída pelo método das dobragens (simulação em <i>GeoGebra</i>)	100
Fig.4.8 - Reta tangente à elipse como vinco de uma dobragem	100
Fig.4.9 - Imagem da Elipse construída pelo método das dobragens (simulação em <i>GeoGebra</i>)	101
Fig.4.10 - Imagem da Hipérbole construída pelo método das dobragens (simulação em <i>GeoGebra</i>)	102
Fig.4.11 - Superfícies de revolução de uma cónica	103
Fig.4.12 - Leis da reflexão da luz	103
Fig.4.13 - Superfície refletora parabólica	104
Fig.4.14 - Superfície refletora elíptica	104
Fig.4.15 - Superfície refletora hiperbólica	104
Fig.4.16 - Forno solar construído em França	105
Fig.4.17 - Litotritor e espelho elíptico	106
Fig.4.18 - Espelho elíptico no sistema de iluminação do dentista	106
Fig.4.19 - Galeria dos murmúrios	107
Fig.4.20 - Planta da sala do Teatro Nacional de S. Carlos	108
Fig.4.21 - Composição de um refletor parabólico-hiperbólico	109
Fig.4.22 - Localização de uma embarcação pelo sistema LORIN de comunicações	110
Fig.4.23 - Mediatriz de um segmento de reta por dobragem	112
Fig.4.24 - Construção da parábola por dobragens, como atividade de aula	113
Fig.4.25 - Construção da elipse por dobragens, como atividade de aula	114
Fig.4.26 - Construção da hipérbole por dobragens, como atividade de aula	115

Introdução

“Steve Jobs pegou a maçã que caiu na cabeça de Isaac Newton e mordeu para nos libertar do insuportável paraíso da ignorância”

Arnaldo Jabor¹

«Quem haveria de dizer que o velho senhor tinha tanto sangue dentro de si?». Esta frase foi citada pelo físico-matemático português Jorge Buescu, no prefácio do livro, *Caos - A Construção de uma Nova Ciência* (1989) da autoria do norte-americano James Gleick (jornalista e repórter científico no New York Times). Buescu refere que a frase foi o título de um artigo de investigação em Engenharia Química, publicado em 1986, e refletia o comportamento de uma cuba de reações químicas, quando os reagentes ficam sujeitos a determinadas condições de mistura. Esse título, salvaguardando os contextos, é capaz de traduzir a reação natural do leitor habituado ao conhecimento tradicional das cónicas, face às quatro abordagens que apresentamos das mesmas, especialmente a Abordagem Sintética e a Projetiva. Porque, como se poderá descobrir ao longo do trabalho, o tema das cónicas é gigantesco, tanto na extensão, como na profundidade dos seus conteúdos, mas sobretudo, na aceção filosófica do termo, pelo assombro que suscita em cada abordagem que fazemos, dando a sensação que há mais qualquer coisa, para lá daquilo que se explicita. Esse é o elemento chave que motivou a escolha do tema desta tese: trazer a lume as várias realidades que envolvem as Cónicas, mostrando que a generalidade do que se divulga nos manuais escolares – definição das cónicas a partir das propriedades focais e pouco mais –, é só a ponta do iceberg. Em *Diferentes Abordagens ao Estudo das Cónicas* (título da tese) pretendemos retratar, com algum detalhe, as realidades mais profundas das Cónicas. Fazemo-lo particularizando quatro abordagens: Abordagem Sintética, Abordagem Analítica, Abordagem Projetiva e Abordagem Didática. Procuramos em cada uma delas consubstanciar, nos conteúdos tratados, a divulgação das “novidades” que, refira-se, pretendem-se surpreendentes, mesmo para leitores mais esclarecidos na matéria.

Começamos na Abordagem Sintética, por destacar o espetacular trabalho de Apolónio de Perga pela forma versátil como veio a conceber o cone, as secções nele produzidas e à definição daquilo que o próprio designou por “sintoma”² da cónica. Seus antecessores, Menecmo, Euclides, e outros tiveram o mérito de desembocarem nas cónicas, quando procuravam soluções dos três problemas clássicos da Matemática grega – a Quadratura do Círculo, a Duplicação do Cubo e a Trissecção do Ângulo. A consistência e o fascínio dos trabalhos de Apolónio, em especial a sua obra prima *As cónicas*, garantiram um poderoso legado histórico, graças às várias traduções para o latim e deste para várias

¹ Arnaldo Jabor – Nascido aos 12 de dezembro de 1940 é um cineasta, crítico e escritor brasileiro.

² Os sintomas de uma curva podem-se entender como uma caracterização algébrica de dedução geométrica, isto é, na linguagem moderna, uma relação característica entre a ordenada e a abcissa de um ponto arbitrário da curva (Katz, 2010, p. 152)

línguas modernas. Foi assim que, em 1822, o matemático belga Germinal Pierre Dandelin pôde dar um contributo importantíssimo no estudo das cónicas materializando a localização geométrica, precisa, tanto dos focos como das diretrizes – estes resultam do posicionamento estratégico de duas esferas que se concebem no interior do cone de modo que sejam simultaneamente tangentes a todas as geratrizes deste e ao plano secante que contém a cónica. Os focos são os pontos de tangencia das esferas com este último. Dandelin colmatou uma lacuna deixada por Apolónio, que pouco adiantou sobre estes pontos. Com a descoberta explícita e localizada dos focos e das diretrizes, decorrem como consequência direta, as propriedades focais. Nada mais seria o mesmo, no estudo das cónicas.

Segue-se a Abordagem Analítica que, provavelmente, pouco surpreenderá o leitor habituado às lides das equações algébricas. Destacamos o papel de Pierre de Fermat, na descoberta de que as secções cónicas podem ser expressas por equações do segundo grau nas coordenadas (x, y) . Ao mostrar que uma secção cónica é uma curva cuja equação cartesiana é do segundo grau, referiremos a recíproca – toda a curva cuja equação é do segundo grau é uma cónica (degenerada ou não).

A Abordagem Projetiva é provavelmente a mais impactante. Ao tomarmos como ponto de partida a imagem captada pelo olho humano, é pertinente investigar as leis geométricas que regem tal processo. Por exemplo, as imagens da Fig.3.2 (captadas do filme *Conic Sections-Darkness*) mostram que as secções cónicas elipse, parábola e hipérbole são resultados da projeção central de um círculo sobre um plano, quando fazemos variar o centro de projeção e/ou o plano de projeção. O que se segue nesta abordagem é a descoberta de mais uma geometria, a Geometria Projetiva, e o que ela representa para o estudo das cónicas – um caminho mais versátil para o seu estudo por “oposição” direta à rigidez e limitações impostas pela Geometria Euclidiana. Os trabalhos pioneiros são protagonizados por Girard Desargues, em 1639 no âmbito do *Brouillon Project d'une atteinte aux événements des rencontres du Cone avec un plan* (“Esboço tosco da tentativa de tratar o resultado de um encontro entre um cone e um plano). Mas é com o matemático suíço Jacob Steiner, que em 1887 surge um processo simples e prático para gerar linhas cónicas em contexto projetivo, e que graças às novas tecnologias em geometria dinâmica (*GeoGebra*), podemos desfrutar da beleza, quase estonteante que estes meios proporcionam, sobretudo da designada “cónica linhas” (Fig.3.39, Fig.3.40 e Fig.3.41).

Finalmente, na Abordagem Didática integramos o essencial da vertente lúdica das cónicas. O vastíssimo leque de aplicações, explorando as propriedades refletoras, foram ostensivamente ilustradas e descritas uma vez que, comportarão elementos que se pretendem motivadores para os alunos, na adesão à própria Matemática. À Didática, como ramo importante da Pedagogia é dedicada uma homenagem a um dos maiores pedagogos de sempre, Jan Amos Komenský (Coménio). Desfechamos o capítulo, com a elaboração de um plano de aula, explorando o aparato de construção das cónicas, por meio de dobragens.

Nesta dissertação, tivemos uma enorme preocupação com a ilustração das figuras. Procuramos que tivessem boa visualização e facilitassem a análise dos leitores menos pacientes. Além disso, procuramos valorizar os aspetos dinâmicos das mesmas, recorrendo sempre que possível ao *software GeoGebra*. Estas figuras encontram-se em ficheiros, no mesmo *CD-ROM* que o trabalho.

Capítulo 1

Abordagem Sintética das Cónicas

Denomina-se por *Geometria Sintética* a Geometria que só utiliza métodos puramente geométricos, isto é, destituída de outras ferramentas como a Álgebra e a Análise. É, de certa forma, a Geometria da intuição e, por isso, a que se ensina nos primeiros cursos escolares. Apesar das dificuldades que concerne, a Geometria Sintética desenvolve melhor que nenhuma outra o que comumente se costuma chamar “visão” ou “intuição geométrica”. Entretanto, para afiançar os seus resultados sintéticos, muitos matemáticos se têm socorrido da Álgebra. Na abordagem sintética das cónicas a seguir neste trabalho focar-se-ão três aspetos:

- O pioneirismo dos primeiros gregos, com Menecmo em primeiro plano, na forma como conceberam as secções cónicas como soluções dos problemas clássicos de incomensurabilidade;
- A genialidade de Apolónio na conceção revolucionária que faz do cone, das secções produzidas nele por um plano, e dos respetivos “sintomas”;
- A subtilidade do matemático belga Germinal Pierre Dandelin que, com as suas famosas esferas, faz a localização geométrica dos focos e das diretrizes das secções cónicas e a forma consequente como emergem novas definições a partir das propriedades focais.

1.1. Os primeiros gregos: Menecmo, Euclides e Pappus.

Durante o período, chamado por Boyer(1996,p.43) Idade Heroica da Matemática (477a.C. – 375a.C.), emergiram os três problemas clássicos da matemática grega:

A quadratura do círculo – Dado um círculo de raio r , determinar, com régua não graduada e compasso, o lado a de um quadrado com área igual a do círculo [Fig.1.1(i)];

A duplicação do cubo – Dado um cubo de aresta a , determinar, com régua não graduada e compasso, o lado b de um outro cubo com o dobro do volume [Fig.1.1(ii)];

A trissecção do ângulo – Dado um ângulo qualquer AVB , determinar, com régua não graduada e compasso, um ângulo AVC com um terço da amplitude do ângulo AVB [Fig.1.1(iii)].

As várias tentativas de resolução desses problemas desencadearam descobertas verdadeiramente geniais na Matemática, de entre as quais se destacariam as cónicas. As origens exatas das secções cónicas são vagas. Consta que estariam ligadas ao problema da duplicação do cubo. Reza a história que por volta do ano 430 antes de Cristo, um quarto da população de Atenas foi dizimada por uma praga. Consternados, os atenienses consultaram o oráculo de Apolo em Delfos sobre como combater a doença. A resposta foi que o altar de Apolo, que possuía o formato de um cubo, deveria ser duplicado. Prontamente mandaram duplicar as dimensões do altar mas isso não afastou a peste.

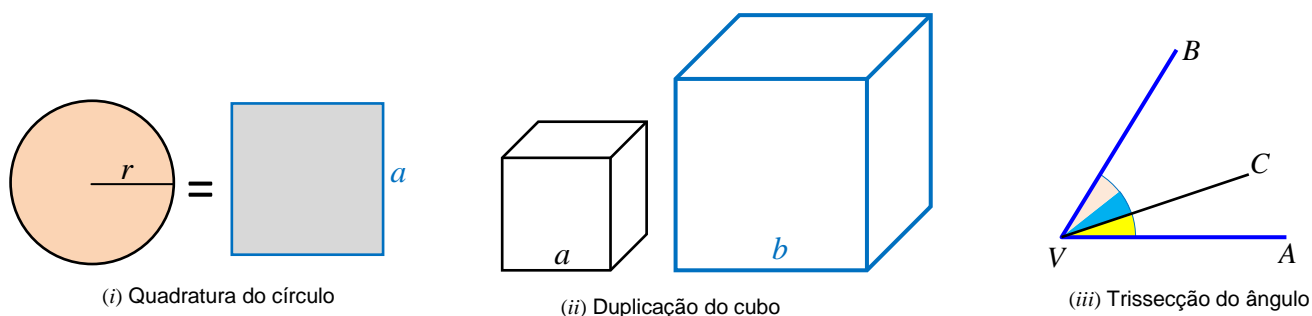


Fig.1.1 - Os três problemas clássicos da Matemática Grega

O volume fora multiplicado por oito e não por dois. Segundo Carlos Sá (2000, p.313) Hipócrates reduziu o problema à determinação de dois meios proporcionais de a e $2a$, isto é, de determinar x e y tais que $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$ sendo a a aresta do cubo original (Fig.1.2).

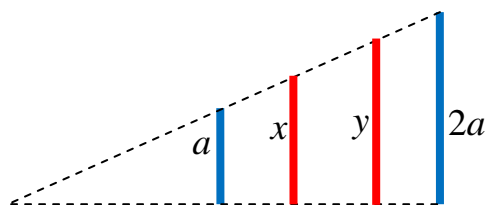


Fig.1.2 - Representação dos meios proporcionais de a e $2a$

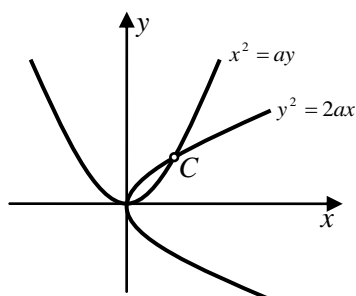
Na abordagem moderna equivaleria a obter as soluções do sistema de qualquer par das três equações

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y}, \frac{x}{y} = \frac{y}{2a} \quad \text{e} \quad \frac{a}{x} = \frac{y}{2a}.$$

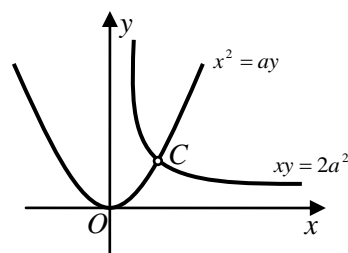
Por exemplo,

$$\begin{cases} x^2 = ay \\ y^2 = 2ax \end{cases} \quad \text{determina a interseção de duas parábolas [Fig.1.3(i)];}$$

$$\begin{cases} x^2 = ay \\ xy = 2a^2 \end{cases} \quad \text{determina a interseção de uma parábola com uma hipérbole [Fig.1.3(ii)].}$$



(i) Interseção de duas parábolas.



(ii) Interseção de uma parábola com uma hipérbole.

Fig.1.3 - A solução gráfica do problema da duplicação do cubo

É com Menecmo (séc. IV a.C.) que surgem as primeiras curvas que satisfazem tais propriedades algébricas. As coordenadas do ponto C , interseção das curvas, dariam os meios proporcionais x e y procurados e, deste modo, ficaria resolvido o problema da duplicação do cubo (Katz, 2010, p. 149). Só não se sabe como Menecmo produziu tais curvas. Sabe-se é como obter pontos da curva $y^2 = 2ax$ utilizando régua e compasso (o quadrado sobre a ordenada é igual ao retângulo sobre a abscissa x e o parâmetro $2a$): começa-se por unir no ponto O os segmentos de comprimento $2a$ e x na mesma reta, para obter o diâmetro de uma semicircunferência. Traça-se, no extremo do segmento de comprimento x uma perpendicular e considera-se a sua interseção com a semicircunferência. O comprimento do segmento perpendicular obtido y satisfaz a condição. Se o processo se repetir para diferentes valores de x , obtêm-se vários pontos da curva, o que permite esboçar a curva. Observa-se que esta construção não permite traçar a curva utilizando régua não graduada e compasso, mas apenas encontrar vários pontos dessa curva. O enigmático é saber como os gregos se aperceberam de que tais curvas podiam ser geradas como secções do cone. Especula-se que Menecmo ao observar os círculos da Fig.1.4 terá imaginado um diagrama de curvas de nível num certo cone, resultantes da sua secção.

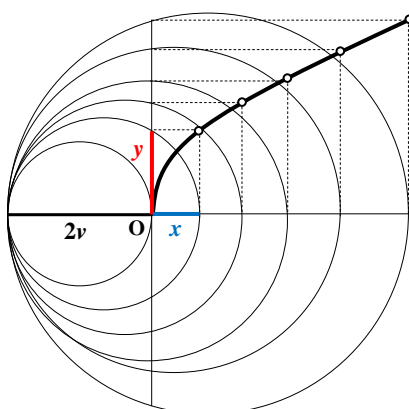


Fig.1.4 - Construção de uma parábola ponto a ponto, aplicando o método euclidiano

Formalmente os três tipos de cónicas, elipse, parábola e hipérbole, são obtidos através da secção de cones retos (eixo perpendicular ao plano da base) em que o plano secante é perpendicular a uma geratriz, pelo que os diferentes tipos de cónica dependem da “abertura” do cone (Fig.1.6).

No livro XI dos *Elementos*, Euclides definiu um cone como um sólido gerado por um triângulo retângulo girando em torno de um dos catetos e classificou-os como sendo acutângulos, retângulos ou obtusângulos conforme o ângulo do vértice for respetivamente agudo, reto ou obtuso (Fig.1.5).

Uma secção de tais cones obtém-se cortando os respetivos cones por um plano perpendicular a uma geratriz. Os resultados ilustram-se na Fig.1.6.

Menecmo chamou a essas secções de “a secção de um cone de ângulo agudo” (elipse), “a secção de um cone de ângulo reto” (parábola) e “a secção de um cone de ângulo obtuso” (hipérbole).

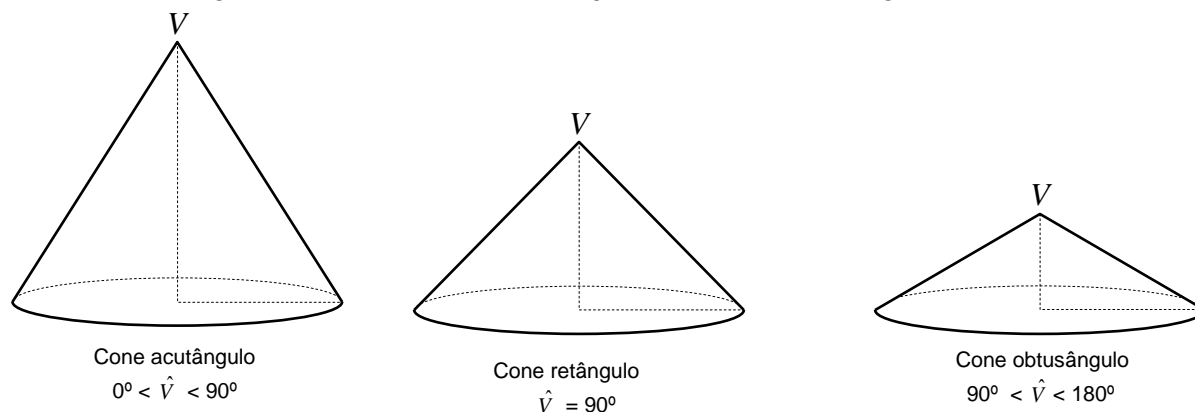


Fig.1.5 - Classificação do cone em termos do ângulo do vértice

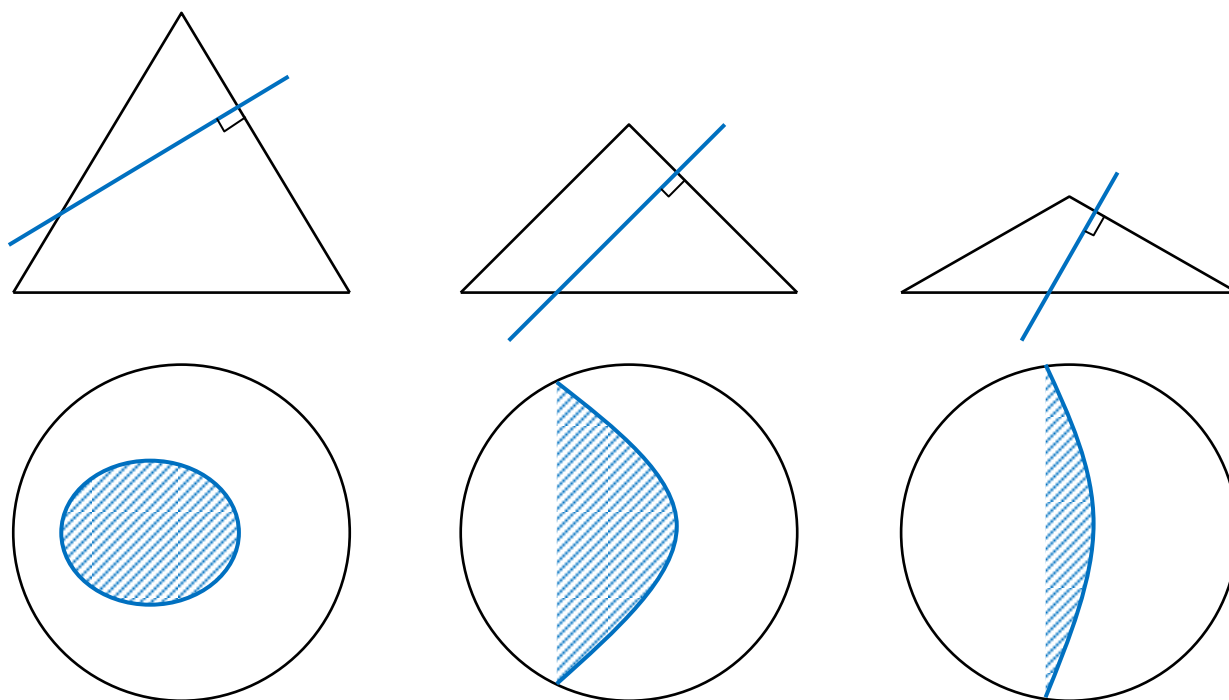


Fig.1.6 - As secções por um plano perpendicular a uma geratriz

Papús de Alexandria (290-350) viveu depois de Apolônio no século IV da era cristã e foi um dos mais proeminentes matemáticos da sua época, apesar do essencial da sua atividade ter sido comentar e reproduzir obras de outros escritores, havendo muito pouco trabalho original (Coolidge, 1945, p.8). Um dos contributos interessantes que deu no estudo das cónicas encontra-se publicado no sétimo livro da sua Coletânea de Matemática, onde enuncia teoremas acerca dos focos, diretrizes e excentricidade das cónicas. Começa com uma demonstração geométrica simples, que abreviaremos adotando as notações analíticas modernas:

Se uma curva tem equação cartesiana do tipo $x^2 = r^2[y^2 + (a - x)^2]$ então é uma cônica.

Enunciado sintético (adaptado):

Consideremos, no mesmo plano, uma reta DE (diretriz) e um ponto F (foco) exterior a DE (Fig.1.7) (Coolidge,1945, p.9). Conduzamos por um ponto P a reta PF e a perpendicular PE a DE e consideremos a razão $\frac{PF}{PE}$ (excentricidade).

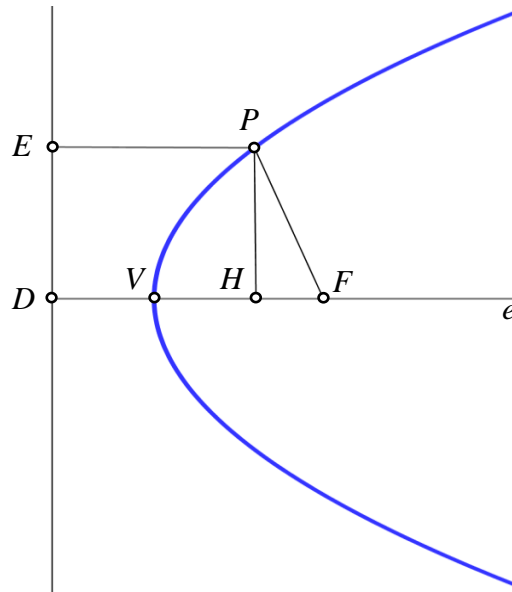


Fig.1.7 - Cónicas segundo Pappus

Nestas condições, Pappus afirma que o ponto P está ligado a uma secção cônica e que esta é uma parábola se $\frac{PF}{PE} = 1$, uma elipse se $\frac{PF}{PE} < 1$ e uma hipérbole se $\frac{PF}{PE} > 1$.

Apresentamos a demonstração no caso em que $\frac{PF}{PE} = 1$. Ei-la:

Desenhem-se a perpendicular FD a DE e a linha PH paralela a DE (Fig.1.7).

Como $\frac{PF}{PE} = 1$ ($PF = PE$) segue sucessivamente

$$PE^2 = PF^2$$

$$PE^2 = PH^2 + HF^2$$

$$(DV + VH)^2 = PH^2 + (FV - VH)^2$$

$$PH^2 = VH(2VF)^2$$

Esta última relação é a forma característica da equação de uma parábola.

O sétimo livro da Coleção inclui algumas outras proposições que vão ser úteis na abordagem

projetiva que faremos das cónicas. Uma delas será a famosa proposição 129 que inspirou Desargues na formulação da teoria polar das cónicas. Outra tem a ver com o emblemático teorema que permite determinar uma cónica a partir de cinco pontos dados.

1.2. Apolônio de Perga

1.2.1. O homem e a sua obra

Apolônio nasceu em Perga (sul da Ásia Menor), e crê-se que tenha vivido por volta de 262 a 190 a.C.. Dos muitos tratados que produziu, apenas dois se preservaram substancialmente - *Dividir segundo uma razão* e *As Cónicas*. Este último, composto por oito volumes (aproximadamente 400 proposições), foi sem dúvida a sua obra-prima. Da obra original sobreviveram sete volumes, dos quais quatro escritos em grego e os restantes três apenas na sua tradução árabe. Esses volumes sobreviventes foram posteriormente traduzidos para o latim, possibilitando posteriores traduções para outras línguas modernas.

1.2.2. O cone segundo Apolônio

Como se referiu anteriormente, antes de Apolônio, a elipse, a parábola e a hipérbole eram obtidas como secções de três tipos diferentes de cone circular reto. Para Apolônio não são necessárias restrições quanto à natureza do cone e à rigidez posicional do plano secante. De um único cone podem obter-se todas as três secções cónicas, simplesmente variando a inclinação do plano secante.

Começa por redefinir o cone de forma diferente da de Euclides, imprimindo-o com maior versatilidade (Fig.1.8):

Uma reta g de comprimento indefinido e passando por um ponto fixo V , move-se ao longo da circunferência de um círculo não coplanar com o ponto V . Desse movimento resultam duas superfícies verticalmente opostas, uma em relação à outra. O ponto fixo V representa o vértice do

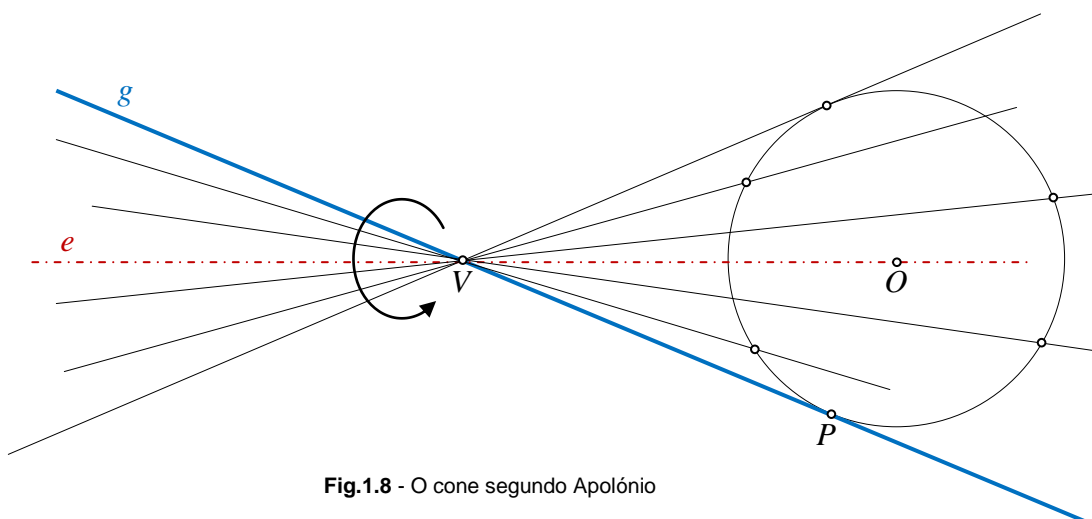


Fig.1.8 - O cone segundo Apolônio

cone, a reta traçada do vértice para o centro O (centro da circunferência) o eixo, a reta VP uma geratriz e a círculo de centro O e raio OP a base do cone.

Apolônio concebe, assim, uma superfície cônica semelhante ao que hoje chamamos um duplo cone (Fig.1.9).

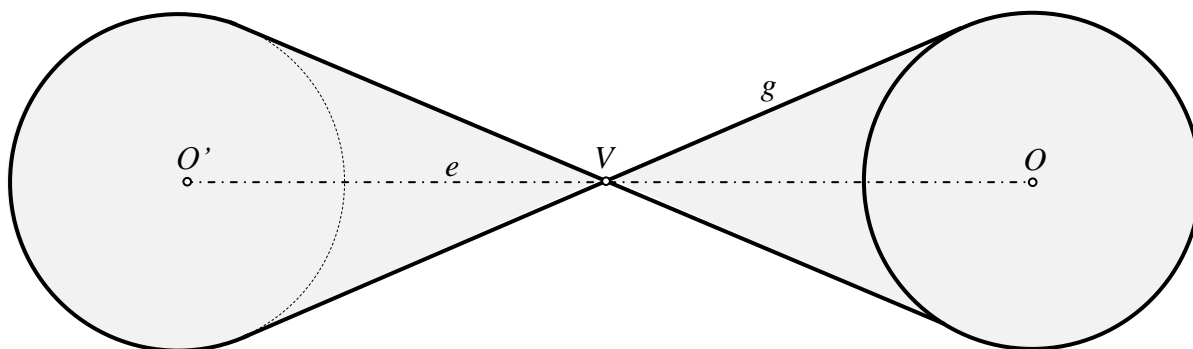


Fig.1.9 - O duplo cone ou cone de duas folhas segundo Apolônio

Um segundo aspeto da generalização de Apolônio foi que o cone não tem necessariamente de ser reto, podendo perfeitamente ser oblíquo (Fig.1.10) sem que se alterem as propriedades das curvas resultantes da secção do cone.

Para simplificação do estudo, consideraremos o eixo perpendicular à base, isto é, trabalharemos com o cone reto. Uma das vantagens do cone de Apolônio é a possibilidade de obter a hipérbole como uma curva única com dois ramos, como veremos mais adiante. Essa nova concepção do cone foi um passo importantíssimo para relacionar os três tipos de curvas.

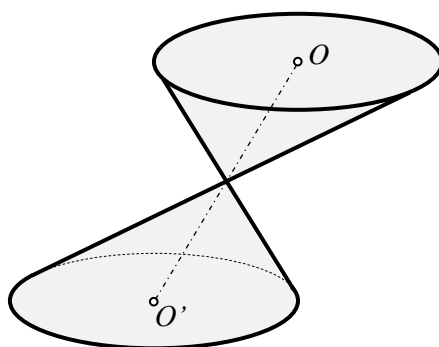


Fig.1.10 - Cone oblíquo

1.2.3. As secções cónicas segundo Apolônio

Segundo Katz (2010, p.152) Apolônio considerou secções do cone por planos arbitrários e deduziu os *sintomas* das curvas resultantes das secções cónicas, assentes em dois conceitos fundamentais: *diâmetro* e *triângulo axial*. Os sintomas de uma curva podem-se entender como uma caracterização

algébrica de dedução geométrica, isto é, uma relação característica entre a ordenada e a abscissa de um ponto arbitrário da curva. Para operacionalizar a dedução dos sintomas das três linhas cónicas Apolónio considera um cone de vértice A e base circular contida num plano β . Secciona o cone por um plano σ (que não contém o vértice A) gerando uma curva \mathcal{C} (Fig.1.11).

Se σ for paralelo a β então \mathcal{C} é uma circunferência.

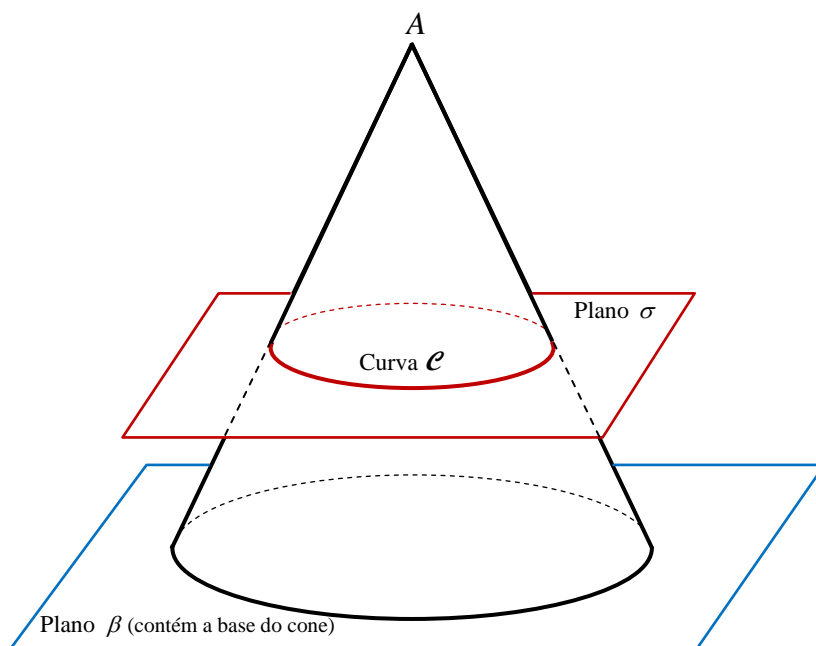


Fig.1.11 - Secções do cone por planos arbitrários

Se σ não for paralelo a β resulta a situação genérica esquematizada na Fig.1.12

- σ e β interseccionam-se numa reta t ;
- Um plano α corta o cone ao longo do eixo determinando o triângulo ABC chamado triângulo axial, o plano α diz-se plano axial;
- A reta t' , que contém o diâmetro BC , intersecta perpendicularmente a reta t no ponto G ;
- Os planos σ e α são concorrentes na reta d , reta essa que intersecta t' no ponto G . A reta d pode assumir várias posições, mas suponhamos, sem perda de generalidade, que intersecta a geratriz AC no ponto D ;
- Por um ponto genérico L da cónica traça-se um plano π paralelo ao plano β da base do cone. Esse plano intersecta as geratrizes AB e AC nos pontos P e R respetivamente. PR é um diâmetro da circunferência de intersecção do cone com π ;

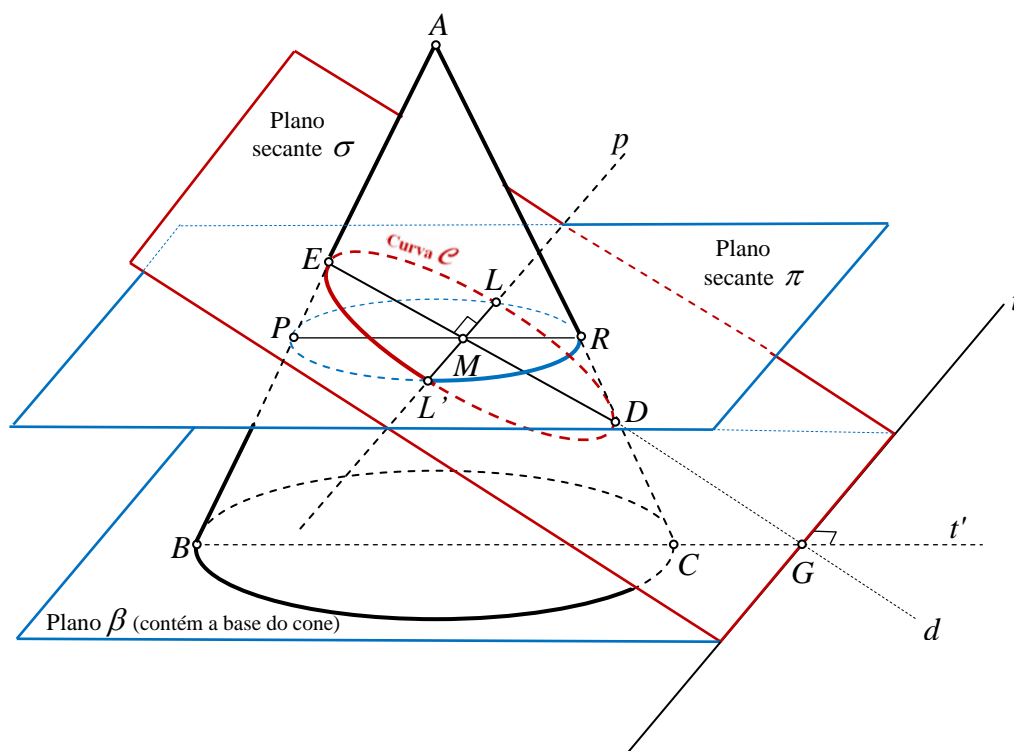


Fig.1.12 - Esquema geral para deduzir os sintomas das linhas cónicas

- Traça-se, pelo ponto L , a reta p paralelamente à reta t e a intersectar o plano axial α no ponto M . A reta p é a intersecção dos planos σ e π . O ponto M é, portanto, comum aos planos α , σ e π . Os pontos D , M e E são colineares por serem comuns aos planos σ e π ;
- A reta p é perpendicular a d porque $p \parallel t$, $t \perp BC$ e $BC \parallel PR$.

Destacando a circunferência contida no plano π , (Fig.1.13) consideramos o diâmetro PR e os pontos L e L' , intersecções da perpendicular p a PR , por M , com a circunferência.

Como $ML = ML'$ concluímos que M é ponto médio da corda LL' da cónica. Uma vez que M pertence a d concluiremos que d contém um diâmetro da cónica \mathcal{C} , e que todas as cordas traçadas paralelamente a t têm a reta d por mediatriz.

Nessa circunferência estão reunidas as condições para deduzir uma importante propriedade, designadamente, *potência de um ponto em relação a uma circunferência*³. Por definição de potência do ponto M ,

$$ML \cdot ML' = MP \cdot MR$$

³ A potência de um ponto em relação a uma circunferência é um conceito métrico que pode ser definido da forma que se segue: Dada uma circunferência de centro O e raio r , e P um ponto situado a uma distância d de O , definimos potência do ponto P em relação à circunferência por:

$$Pot(P) = d^2 - r^2$$

Se uma reta passa por P e corta a circunferência nos pontos A e B então $Pot(P) = PA \cdot PB$.

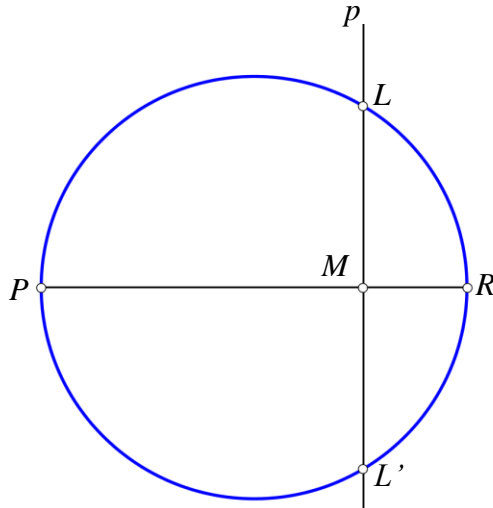


Fig.1.13 - Potência de um ponto em relação a uma circunferência

Uma vez que o diâmetro PR é mediatriz da secante LL' , $ML = ML'$, pelo que se terá $ML^2 = MP \cdot MR$. Fica assim estabelecida a propriedade

$$ML^2 = MP \cdot MR.$$

A parábola, a elipse e a hipérbole resultam de secções do cone que cortam o plano da base circular numa linha reta perpendicular a BC ou BC prolongado. Para cada cónica procuraremos definir o respetivo sintoma.

1.2.3.1. O sintoma da parábola

Consideremos o diâmetro d da cónica, paralelo ao lado AC do triângulo axial [(Fig.1.14(i))].

Deduzir o sintoma padrão da parábola consiste em definir uma relação entre EM e LM , a abcissa e ordenada (linguagem moderna), respetivamente, do ponto L na curva \mathcal{C} . Prova-se que essa relação é definida por

$$LM^2 = EH \cdot EM \quad (1.1)$$

onde EH é um segmento perpendicular a EM .

Demonstração:

Na Fig.1.15 os triângulos EMP , APR e ABC são semelhantes.

Portanto,

$$\frac{PM}{EM} = \frac{BC}{AC} \quad \text{e} \quad \frac{PR}{AP} = \frac{PM}{PE} = \frac{BC}{AB}$$

Por conseguinte, uma vez que

$$\frac{MR}{AE} = \frac{PR - PM}{AP - PE} = \frac{BC}{AB} \quad \text{tem-se} \quad \frac{LM^2}{AE \cdot EM} = \frac{PM \cdot MR}{AE \cdot EM} = \frac{BC^2}{AC \cdot AB}$$

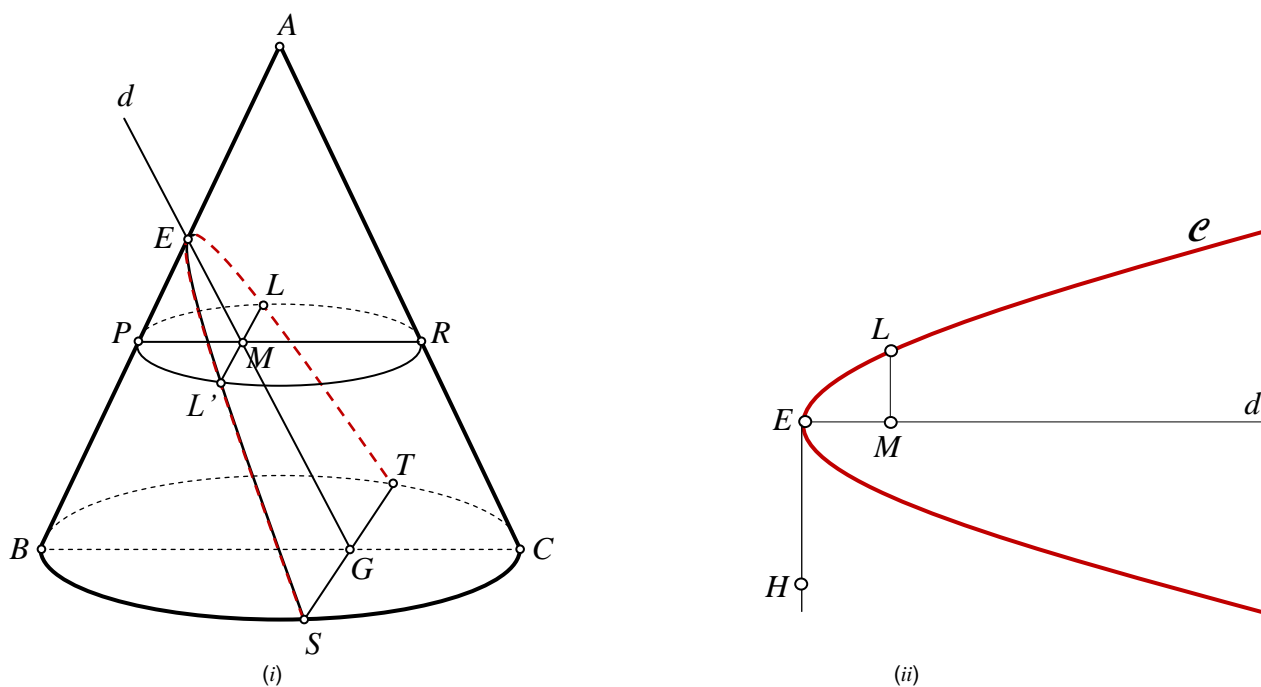


Fig.1.14 - Dedução do sintoma da parábola

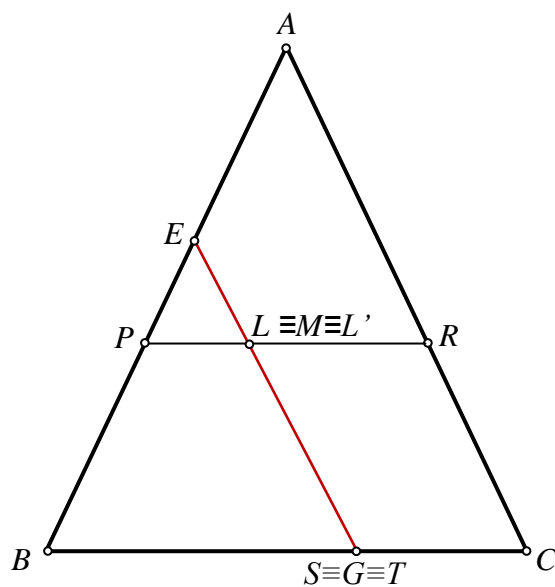


Fig.1.15 - Corte transversal segundo o plano axial
(parábola)

A relação

$$\frac{LM^2}{AE \cdot ME} = \frac{BC^2}{AC \cdot AB}$$

mostra que a razão entre as áreas do quadrado de lado LM e do retângulo de lados AE e ME , é constante, isto é, depende apenas das razões entre os lados do triângulo axial ABC , e não do ponto genérico L sobre a cônica. Para definir o sintoma da parábola, Apolônio considera um segmento de reta EH [(Fig.1.14(ii))], perpendicular a EG de modo a verificar a proporcionalidade

$$\frac{EH}{AE} = \frac{BC^2}{AC \cdot AB} \quad \text{ou} \quad \frac{EH}{AE} = \frac{LM^2}{AE \cdot EM}.$$

Tem-se então

$$LM^2 = \frac{EH}{AE} \cdot AE \cdot EM \quad \text{ou} \quad LM^2 = EH \cdot EM \quad \blacksquare$$

Segundo Katz (2010, p.152) podemos, assim, enunciar o sintoma da parábola do seguinte modo:

A abscissa EM de um ponto genérico L da cônica obtém-se aplicando ao segmento de reta EH a área do quadrado cujo lado é a ordenada LM desse ponto.

Fazendo $LM = y$, $EM = x$ e $EH = p$ deduz-se a equação padrão da parábola: $y^2 = px$. O nome parábola é original do grego *paraboli* (aplicado). A constante p é chamado parâmetro da parábola, e depende apenas do plano secante que determina a curva.

1.2.3.2. O sintoma da elipse

Admitamos que o diâmetro d da cônica interseja ambos os lados do triângulo axial nos pontos D e E de modo que os pontos D , E , M e G sejam colineares na reta d [Fig.1.16(i)]. Uma reta que passa por A e é paralela a d interseja o plano β da base no ponto K .

Deduzir o sintoma padrão da elipse consiste em definir uma relação entre EM e LM , a abscissa e ordenada, respetivamente, do ponto L na curva \mathcal{C} . Prova-se que essa relação é dada por

$$LM^2 = EH \cdot EM - \frac{EH}{ED} \cdot EM^2 \quad \text{ou} \quad LM^2 = EM \left(EH - \frac{EH}{ED} \cdot EM \right) \quad (1.2)$$

onde EH é um segmento perpendicular a EM [Fig.1.16(ii)].

Demonstração:

Na Fig.1.17 os triângulos EMP e ABK são semelhantes, pelo que

$$\frac{PM}{EM} = \frac{BK}{AK}.$$

Os triângulos DMR e ACK são semelhantes pelo que

$$\frac{MR}{MD} = \frac{CK}{AK}.$$

Consequentemente,

$$\frac{LM^2}{EM \cdot MD} = \frac{MP \cdot MR}{EM \cdot MD} = \frac{BK}{AK} \cdot \frac{CK}{AK} = \frac{BK \cdot CK}{AK^2}.$$

Considerando um segmento de reta \overline{EH} , perpendicular a \overline{ED} , de modo que

$$\frac{EH}{ED} = \frac{BK \cdot CK}{AK^2},$$

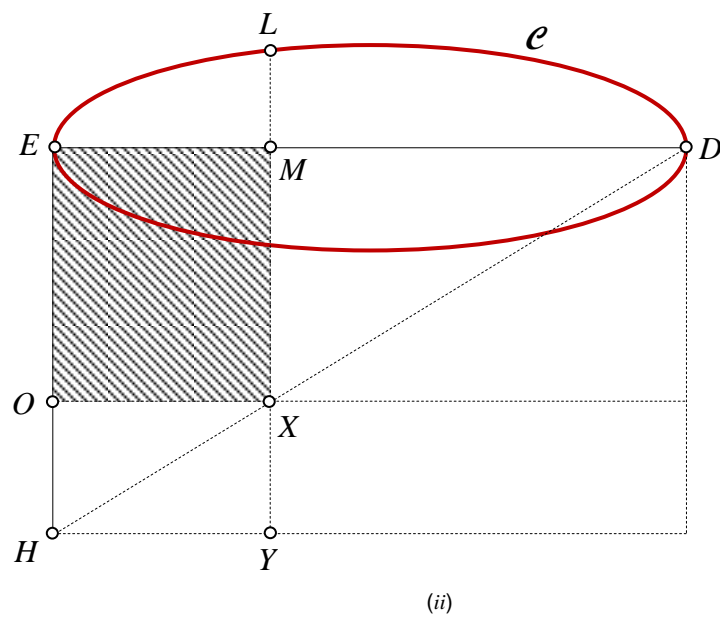
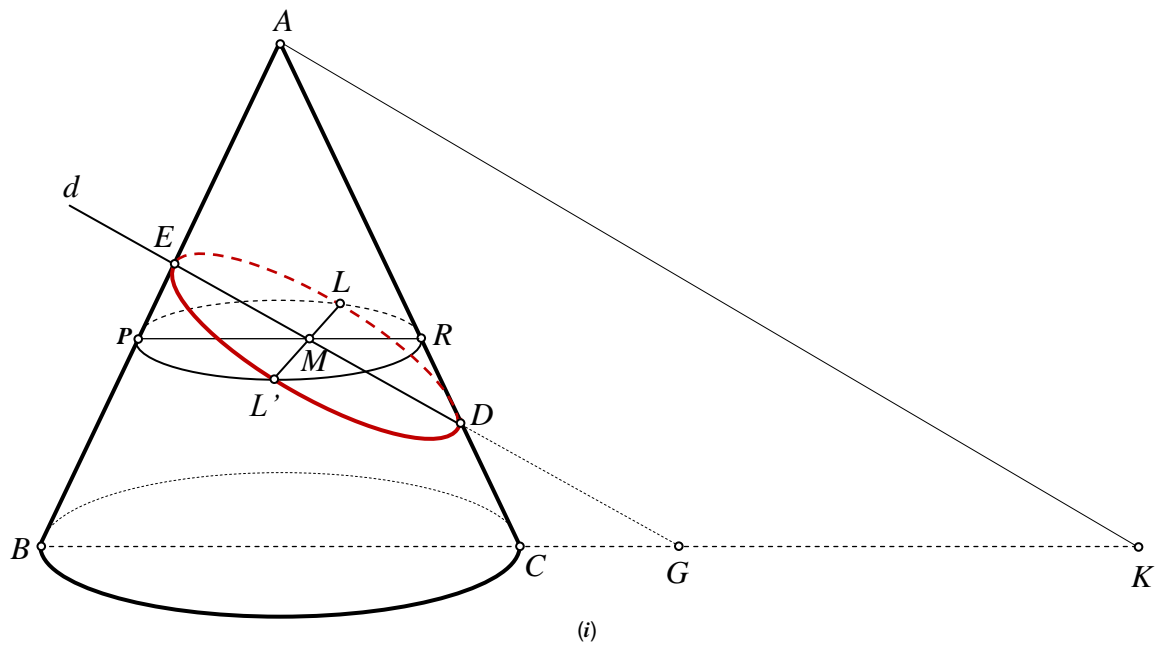


Fig.1.16 - Dedução do sintoma da elipse

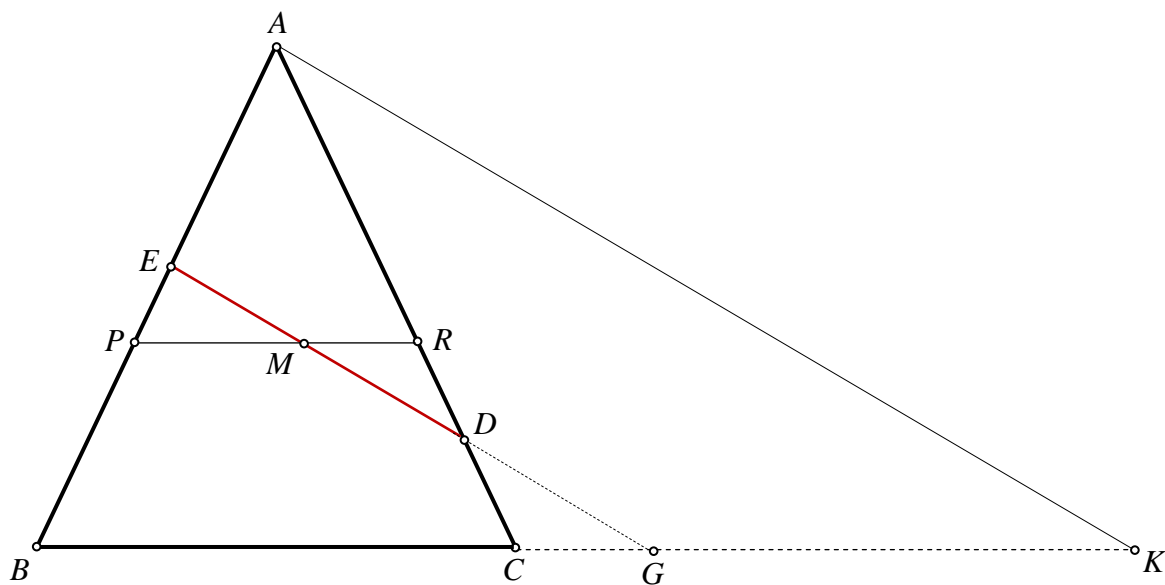


Fig.1.17 - Corte transversal segundo o plano axial
(elipse)

a relação

$$\frac{LM^2}{EM \cdot MD} = \frac{KB \cdot KC}{AK^2} \Leftrightarrow \frac{LM^2}{EM \cdot MD} = \frac{EH}{ED}$$

assume a forma

$$LM^2 = EH \cdot EM - \frac{EH}{ED} \cdot EM^2 \quad \text{ou} \quad LM^2 = EM \left(EH - \frac{EH}{ED} \cdot EM \right) \blacksquare$$

O sintoma da elipse fica assim definido pela expressão

$$LM^2 = EH \cdot EM - \frac{EH}{ED} \cdot EM^2$$

e pode enunciar-se do seguinte modo:

A abcissa ME de um ponto genérico L da cônica obtém-se aplicando, por defeito, ao segmento de reta

EH, a área do quadrado de lado LM, sendo esse defeito o retângulo de lados $\frac{EH}{ED} \cdot EM$ e EM, que é,

por seu lado, semelhante ao retângulo de lados EH e ED [Fig.1.16(ii)].

Fazendo

$$LM = y, \quad EM = x, \quad EH = p \quad \text{e} \quad DE = 2a$$

deduz-se a equação padrão da elipse:

$$y^2 = px - \frac{p}{2a} x^2 \quad \text{ou} \quad y^2 = x \left(p - \frac{p}{2a} x \right)$$

O nome elipse (*ellipsis* = *falta*) é o original do grego que Apolônio adotou para *defeito*. As constantes p e a são chamados parâmetros da elipse, e dependem apenas do plano secante que determina a curva.

1.2.3.3. O sintoma da hipérbole

Quando o diâmetro d da cônica não intersesta o lado AC do triângulo axial, mas sim o seu prolongamento, a curva resultante é uma hipérbole. Trata-se de uma curva com características análogas à elipse. Na Fig.1.18(i) pode observar-se que a diferença está na localização do ponto E entre M e D (Na elipse M estava compreendido entre D e E) .

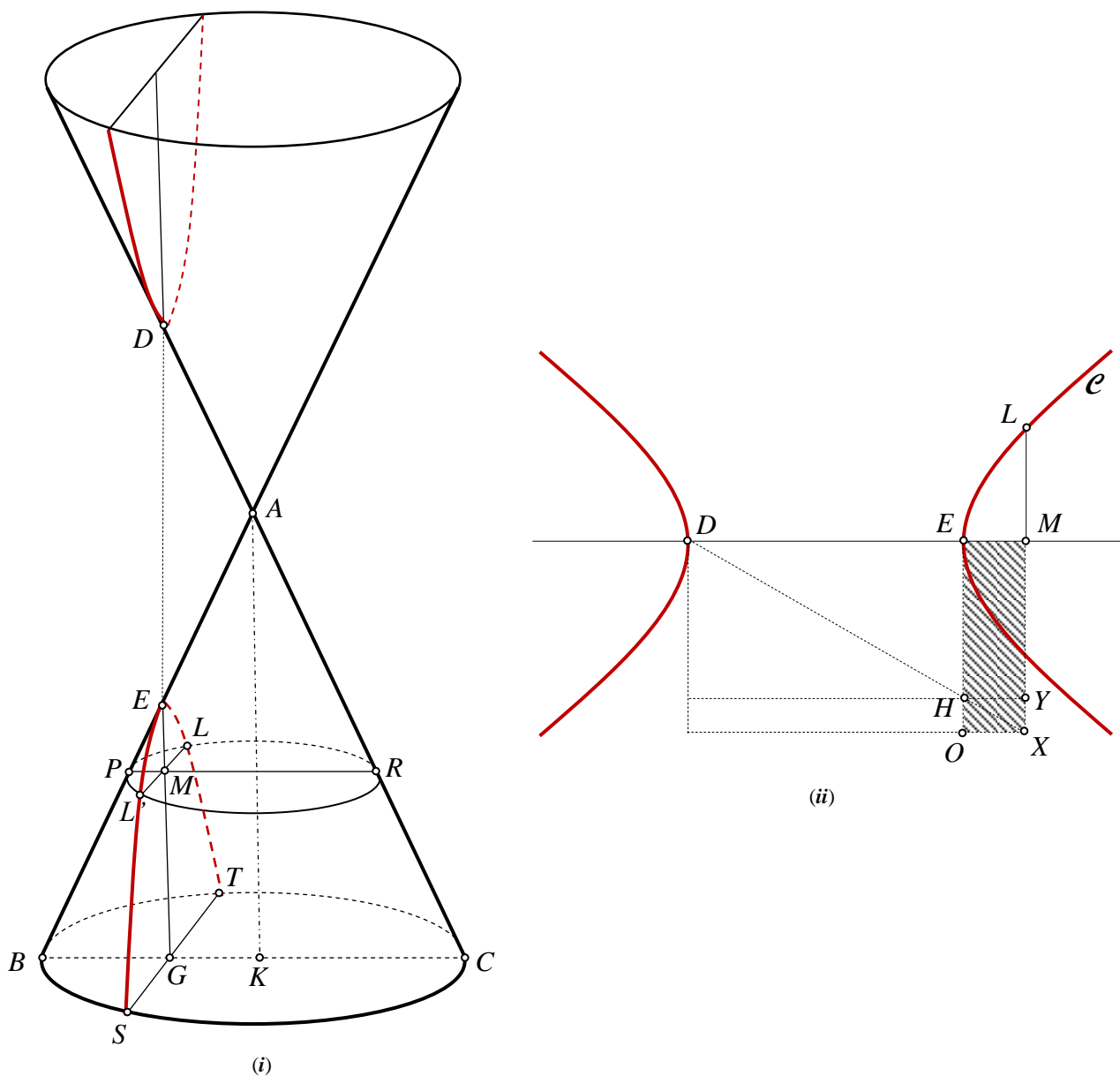


Fig.1.18 - Dedução do sintoma da hipérbole

Deduzir o sintoma padrão da hipérbole consiste em definir uma relação entre EM e LM , a abcissa e ordenada, respetivamente, do ponto L na curva \mathcal{C} .

Prova-se que essa relação é dada por

$$LM^2 = EH \cdot EM + \frac{EH}{ED} \cdot EM^2 \quad \text{ou} \quad LM^2 = EM \left(EH + \frac{EH}{ED} \cdot EM \right) \quad (1.3)$$

onde EH é um segmento perpendicular a EM [Fig.1.18(ii)].

A demonstração é, em tudo, análoga à da elipse.

O sintoma da hipérbole fica, assim, definido pela expressão

$$LM^2 = EH \cdot EM + \frac{EH}{ED} \cdot EM^2$$

e pode enunciar-se do seguinte modo:

A abcissa EM de um ponto genérico L da cónica obtém-se aplicando, por excesso, ao segmento de reta EH , a área do quadrado de lado LM , sendo esse excesso o retângulo de lados $\frac{EH}{ED} \cdot EM$ e EM , que é, por seu lado, semelhante ao retângulo de lados EH e ED [Fig.1.18(ii)].

Fazendo $LM = y$, $EM = x$, $EH = p$ e $DE = 2a$ deduz-se a equação padrão da hipérbole:

$$y^2 = px + \frac{p}{2a} x^2 \quad \text{ou} \quad y^2 = x \left(p + \frac{p}{2a} x \right)$$

O nome hipérbole (*yperboli* = excesso) é o original do grego que Apolónio adotou para excesso. As constantes p e a são chamados parâmetros da hipérbole, e, também, dependem apenas do plano secante que determina a curva.

1.2.4. Análise de algumas outras características abordadas por Apolónio

Analisaremos as tangentes e normais às linhas cónicas e os focos.

1.2.4.1. Tangentes e normais às cónicas

Segundo Katz (2010, p. 157) a definição de reta tangente e normal a um ponto qualquer das Cónicas já era tratada por Apolónio que os exprimiu nalgumas proposições. O traçado de tangentes é apresentado no Livro I em proposições que nos limitamos a transcrever do próprio Katz:

Proposição I-33. Seja C um ponto sobre a parábola CBT com CD perpendicular ao diâmetro BD . Se o diâmetro for prolongado até A com $AB=BD$, então a reta AC será tangente à parábola em C (Fig.1.19).

Proposição I-34. Seja C um ponto numa elipse ou hipérbole, CB a perpendicular do ponto C para o diâmetro ou o prolongamento deste. Sejam G e H as interseções do diâmetro com a curva e escolhamos A no diâmetro ou no prolongamento do diâmetro tal que $\frac{AH}{AG} = \frac{BH}{BG}$.

Então AC será tangente à curva em C (Fig.1.20).

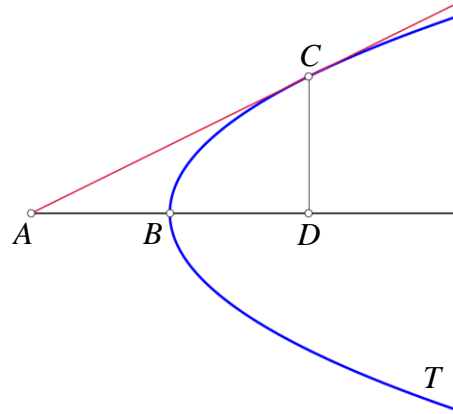


Fig.1.19 - Tangente à parábola segundo Apolônio (Proposição I-33)

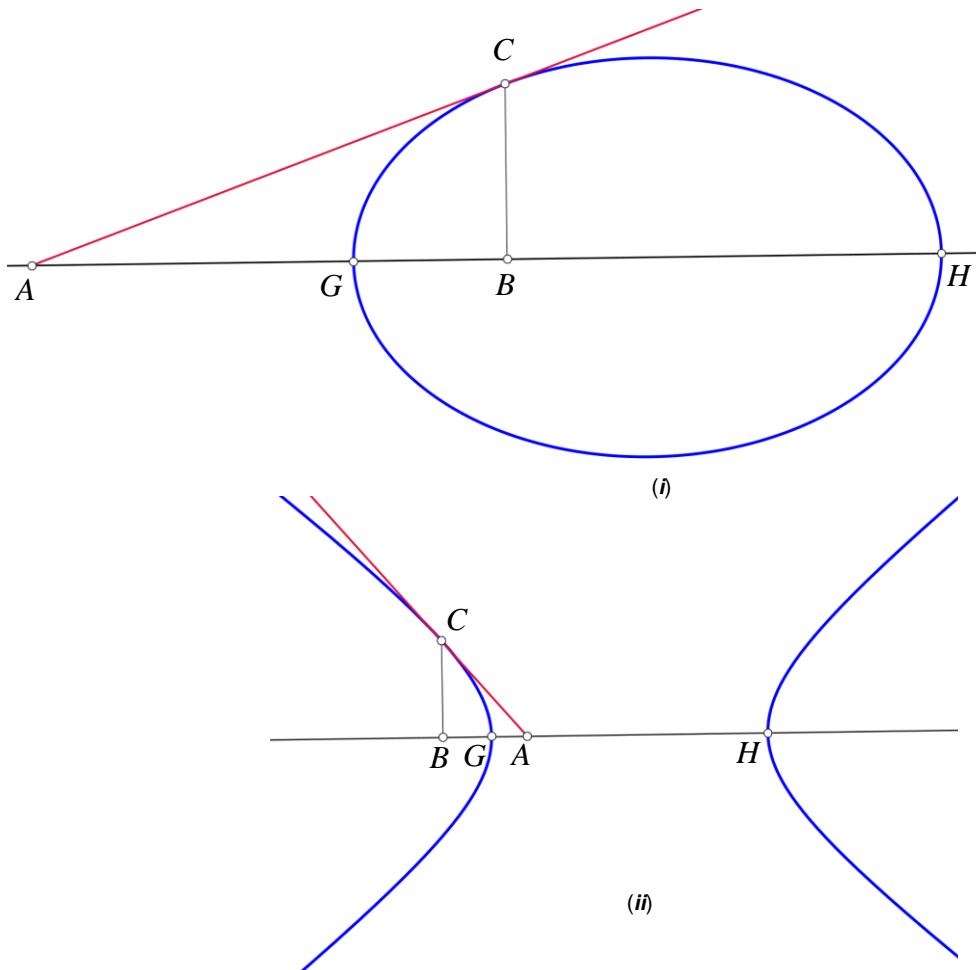


Fig.1.20 - Tangente à elipse e à hipérbole segundo Apolônio (Proposição I-34)

Em relação às normais às cônicas, Apolônio considera (no Livro V) apenas o caso da parábola.

Proposição V-8, V-13, V-27. Numa parábola com vértice A e sintoma $y^2 = px$, seja G o ponto sobre o eixo tal que $AG > \frac{p}{2}$. Seja N tomado entre A e G tal que $NG = \frac{p}{2}$. Então NP é traçado perpendicular ao eixo que encontra a curva em P e PG é reta mínima de G para a curva. Reciprocamente, se PG é a reta mínima de G para curva e PN é traçada perpendicular ao eixo, $NG = \frac{p}{2}$. Finalmente, PG é perpendicular à tangente TP (Fig.1.21).

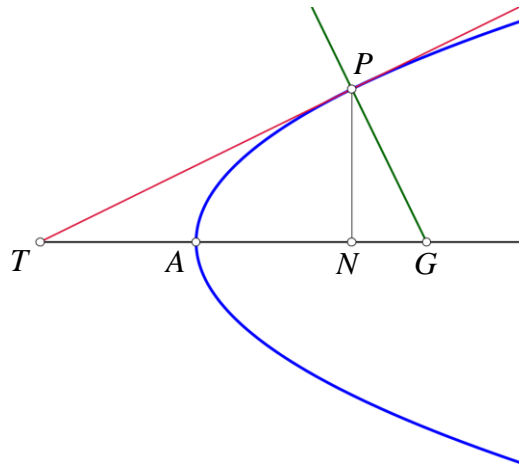


Fig.1.21 - Normal a uma cônica segundo Apolônio (Proposição V-8, V-13, V-27)

1.2.4.2. Focos e suas propriedades

Katz (2010, p.159-160) refere que no Livro III, Apolônio trabalha com as propriedades focais da elipse e hipérbole. Na proposição III-45, por exemplo (Katz não exibe ilustração), ele define os focos de uma elipse como os pontos F, G sobre o eixo AB tal que a área do retângulo de lados AF e FB é igual a um quarto do retângulo de lados PL (parâmetro da curva) e eixo AB , e semelhantemente para o retângulo de lados AG e GB . (Apolônio denominou os pontos F e G de “pontos que surgem da aplicação” do retângulo para o eixo. O termo “foco” foi usado primeiramente por Johannes Kepler em 1604). Em termos algébricos, considerando a distância $AB = 2a$, a distância de F e G ao centro O igual a c e o parâmetro $PL = p$, a condição de Apolônio pode ser traduzida pela equação

$$(a - c)(a + c) = \frac{1}{4} \cdot 2ap \quad \text{ou} \quad a^2 - c^2 = \frac{ap}{2}.$$

Dada essa definição, Apolônio apresenta, então, uma série de proposições que dão origem ao resultado bem conhecido de que as retas que passam por um ponto qualquer da elipse, ligando esse ponto aos focos, formam ângulos iguais com a reta tangente à elipse nesse ponto.

Embora tenha apresentado um resultado semelhante para hipérbole, Apolônio não trabalhou com as propriedades do foco da parábola, ou talvez o tenha feito em partes da obra que se perderam. De qualquer forma, a propriedade análoga para uma parábola, que qualquer reta do foco ao ponto sobre a parábola faz um ângulo com a tangente naquele ponto igual a um feito por uma reta paralela ao eixo, foi provavelmente provado primeiramente por Diocles (240-180 a.C.), um contemporâneo de Apolônio, no tratado *Sobre Espelhos que Queimam*, talvez escrito um pouco antes das Cónicas. Foi devido à propriedade da reflexão da parábola que Diocles dá este nome ao tratado. O problema de encontrar uma superfície espelhada de forma que, quando orientada para o sol, os raios refletidos por ela se encontrem num ponto, causando, assim, combustão. Diocles mostrou que isto deveria ser verdade para um paraboloide de revolução. Há relatos sobre Arquimedes e outros que apontam para que tal espelho foi usado para incendiar navios inimigos. Porém não há testemunhos fidedignos para a veracidade destas narrativas.

Para Katz (2010, p.160), Diocles mostrou como construir uma parábola usando a propriedade foco-diretriz. Não há referências anteriores desta propriedade particular de uma parábola, embora seja discutido no comentário de Papus no século IV. Conforme referimos na secção 1.1 Papus também observou que uma elipse é determinada como o lugar geométrico dos pontos cuja razão das distâncias a um ponto fixo (o foco) e a reta fixa (a diretriz) é uma constante menor que 1, enquanto que para a hipérbole esta razão era maior que 1. Estas propriedades provavelmente também foram descobertas na época de Diocles e Apolônio.

Nas Cónicas, porém, era tratada somente a propriedade dos dois focos da elipse e hipérbole. A proposição III-51 estabelece uma definição para a hipérbole, isto é, se traçar um segmento de reta de um ponto arbitrário para cada foco, “o maior dos segmentos de reta excede o menor em um valor constante e igual ao eixo dessa curva”. A proposição III - 52 mostra que numa elipse a soma destes dois segmentos de reta são iguais ao eixo maior. Por outras palavras, se P é um ponto da curva e D e E são os dois pontos do foco, então $PD - PE = 2a$ para a hipérbole e $PD + PE = 2a$ para a elipse. Estas propriedades são atualmente usadas na definição destas duas curvas.

1.3. As esferas de Dandelin

Em livros e textos modernos sobre cónicas, os focos desempenham um papel proeminente. Surpreende por isso que, perante a tão extraordinária amplitude e profundidade de tratamento que deu às cónicas, Apolônio tenha dado pouca relevância a esse ponto. Conforme vimos na secção anterior, fez referência às interessantes propriedades focais das cónicas mas não chega a materializar objetivamente o foco. Também não há conceito numérico que corresponda ao que hoje chamamos de excentricidade. Quanto à diretriz, diz Boyer (1996, p.106) não é claro que Apolônio conhecesse o papel dessa reta com a familiaridade que hoje temos dela. Entretanto, não é de excluir

a possibilidade de que tais omissões se devam ao facto dos referidos conceitos terem sido registados em obras que se perderam.

É com o matemático belga Germinal Pierre Dandelin (1794-1847) que, em 1822, se desenvolve um trabalho notável sobre as cónicas, numa abordagem também sintética, recuperando todos esses elementos. Seguindo as pisadas de Apolónio, Dandelin começa por fazer a localização geométrica quer dos focos quer da diretrizes. Enuncia depois, propriedades que são determinantes para novas definições das cónicas, se quisermos, “sintomas modernos” para as cónicas.

1.3.1. Determinação das secções cónicas

Para reproduzir os trabalhos de Dandelin consideramos as secções de um cone circular reto de duas folhas por um plano π que não passa pelo vértice V do cone (Fig.1.22).

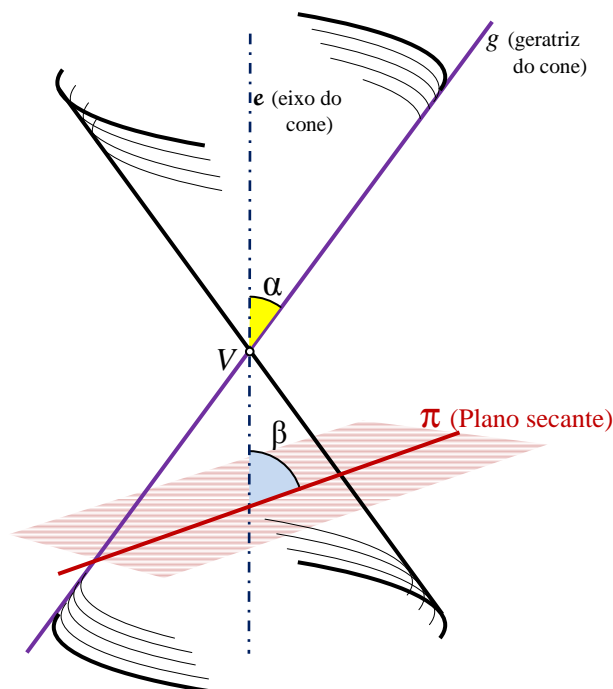


Fig.1.22 - Abordagem de Dandelin ao cone

A reta g descreve um cone circular reto de duas folhas. Toda reta que é obtida rodando g em torno da reta e chama-se geratriz do cone. A reta e é o eixo do cone, o ponto V , interseção de g e e , é o vértice do cone. Denomina-se por α a amplitude do ângulo entre g e e ($0 < \alpha < 90^\circ$). Uma secção cónica (ou simplesmente cónica) é dada pela interseção do cone com o plano π . β designa a amplitude do ângulo que o plano secante π faz com o eixo e .

A natureza da secção resultante depende de dois fatores: da amplitude dos ângulos α (semiabertura do cone) e β , e da posição do plano secante relativamente ao vértice V , ou seja, se este pertence ou não ao plano secante (Fig.1.23).

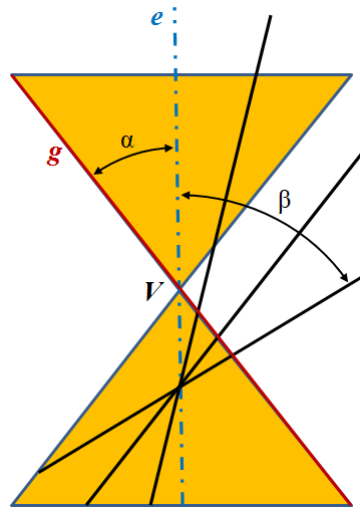


Fig.1.23 - Posicionamento do plano secante relativamente ao cone

Destacam-se, assim, seis situações:

- (i) O plano secante é paralelo ao eixo do cone ($\alpha > \beta$ sendo $\beta = 0$) e a secção obtida é uma hipérbole (Fig.1.24);

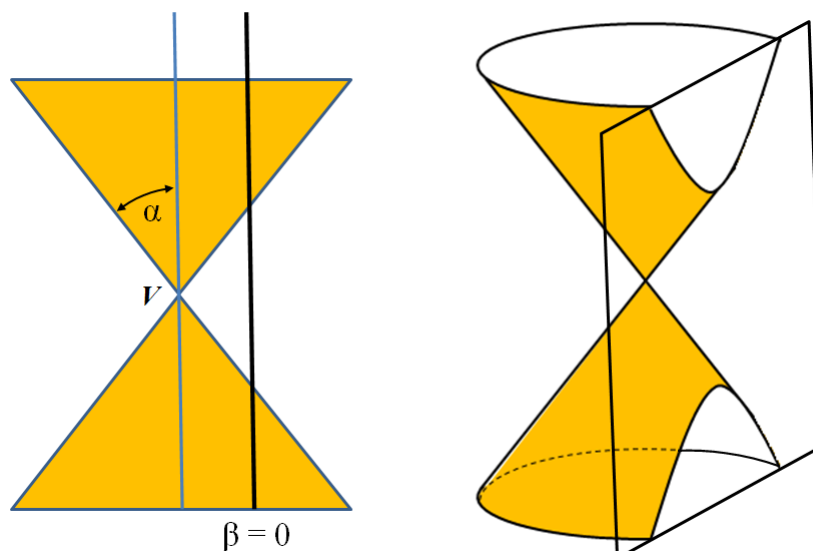


Fig.1.24 - Hipérbole

- (ii) O plano secante contém o eixo do cone ($\alpha > \beta$ sendo $\beta = 0$) e a secção resultante é uma hipérbole degenerada, traduzida em duas linhas que originam dois triângulos, um em cada uma das folhas do cone (Fig.1.25)

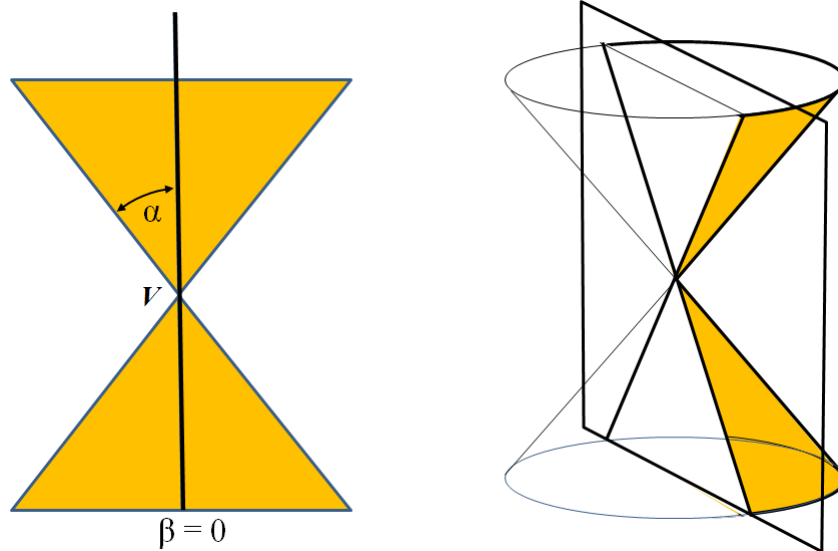


Fig.1.25 - Hipérbole degenerada em duas linhas

- (iii) O plano secante é paralelo a uma geratriz ($\alpha=\beta$) e a secção resultante é uma parábola (Fig.1.26);

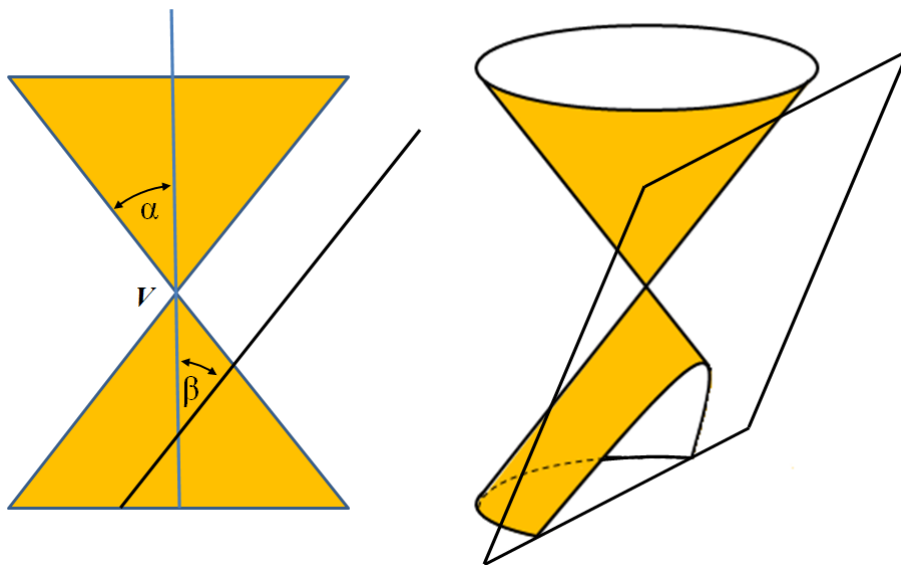


Fig.1.26 - Parábola

- (iv) O plano secante contém uma geratriz ($\alpha=\beta$) e a secção resultante é uma parábola degenerada numa linha tangente à superfície do cone ao longo de uma geratriz (Fig.1.27);

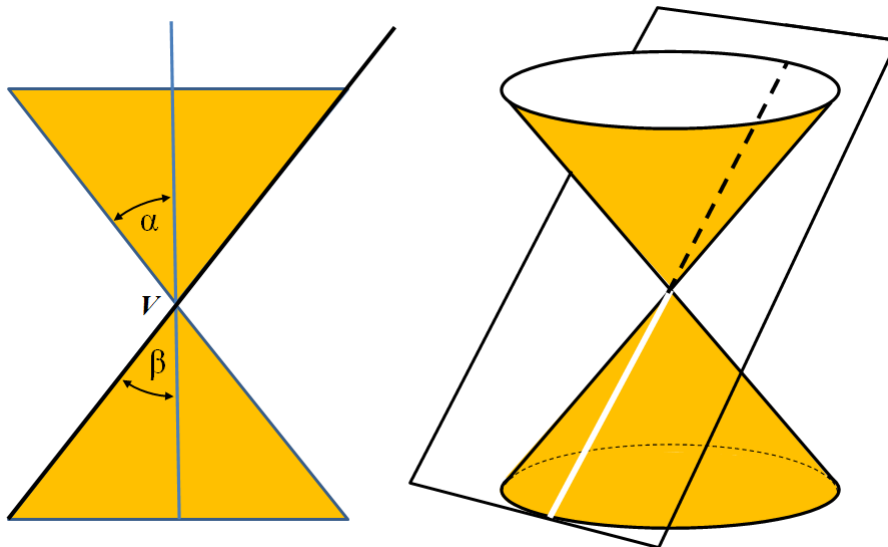


Fig.1.27 - Parábola degenerada numa linha

- (v) O plano secante intersecta todas as geratriz ($\alpha < \beta$) e secção resultante é uma elipse (Fig.1.28);

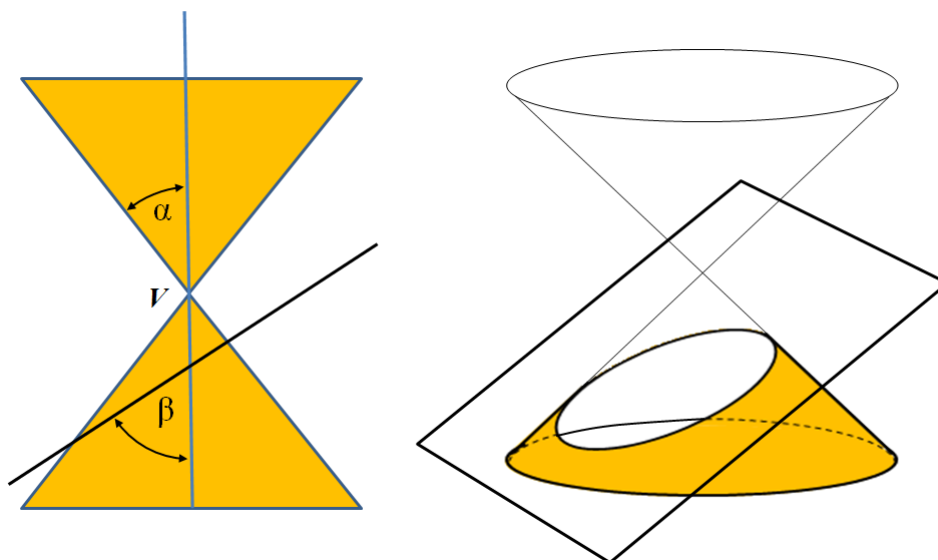


Fig.1.28 - Elipse

- (vi) O plano secante contém o vértice do cone ($\alpha < \beta$) e a secção resultante é uma elipse degenerada num ponto, o próprio vértice do cone (Fig.1.29).

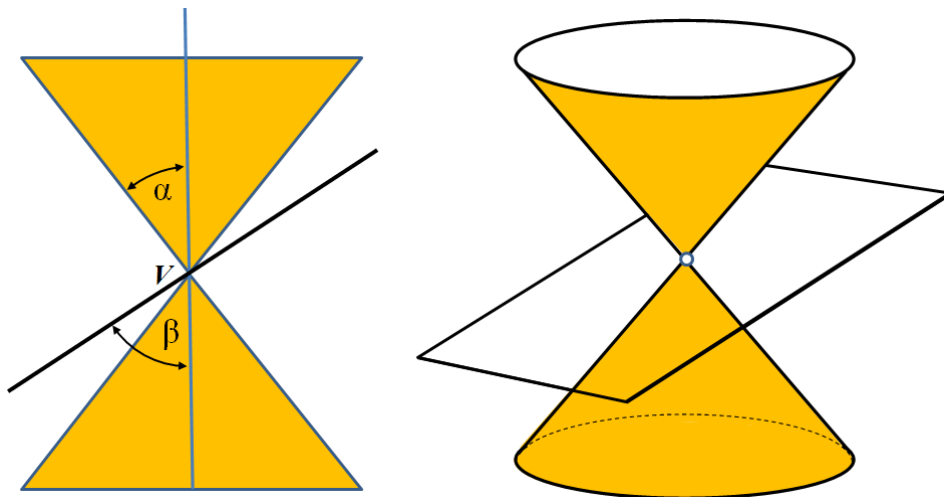


Fig.1.29 - Elipse degenerada num ponto

Para o estudo a desenvolver interessam apenas as secções cónicas não degeneradas, também designadas por cónicas “suaves” nalgumas literaturas.

1.3.2. A origem dos focos de uma cónica

Nas construções que propõe, Dandelin concebe a existência de esferas que se inscrevem no cone nas seguintes condições:

- Todas as geratrizes do cone são tangentes às esferas de modo que o lugar geométrico dos pontos de tangência são circunferências;
- O plano secante que determina a cónica é tangente às esferas sendo os pontos de tangência desse plano com as esferas os focos da cónica.

Assim, se a cónica é uma elipse ou uma hipérbole, há duas esferas inscritas no cone e por consequência dois focos F_1 e F_2 (Fig.1.30).

Em ambas as situações as esferas de Dandelin são tangentes à superfície cónica nas circunferências c_1 e c_2 e tangentes ao plano secante nos pontos F_1 e F_2 (os focos).

Se a cónica é uma parábola, apenas uma esfera se inscreve no cone e por consequência existe um único foco F (Fig.1.31). A esfera S_1 é tangente à superfície cónica na circunferência c_1 e tangente ao plano secante no ponto F (o foco). A razão de haver somente uma esfera deve-se ao facto do plano secante ser paralelo a uma geratriz do cone e, por conseguinte, uma hipotética segunda esfera de Dandelin nunca poderia ser tangente a todas as geratrizes.

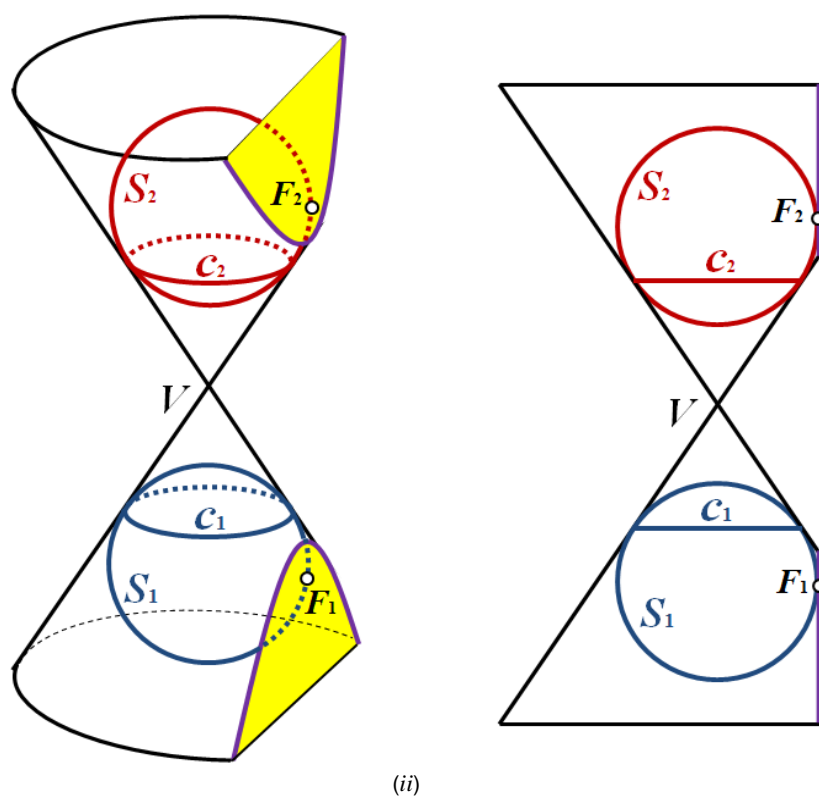
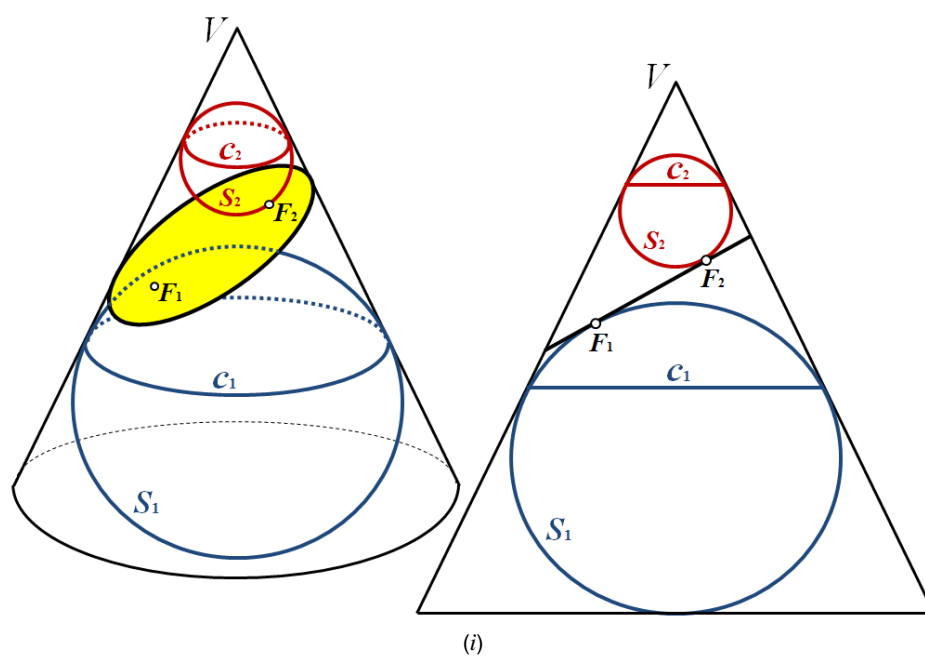


Fig.1.30 - Perspetiva tridimensional e perspetiva segundo corte transversal, das esferas de Dandelin relativos à elipse (i) e à hipérbole (ii)

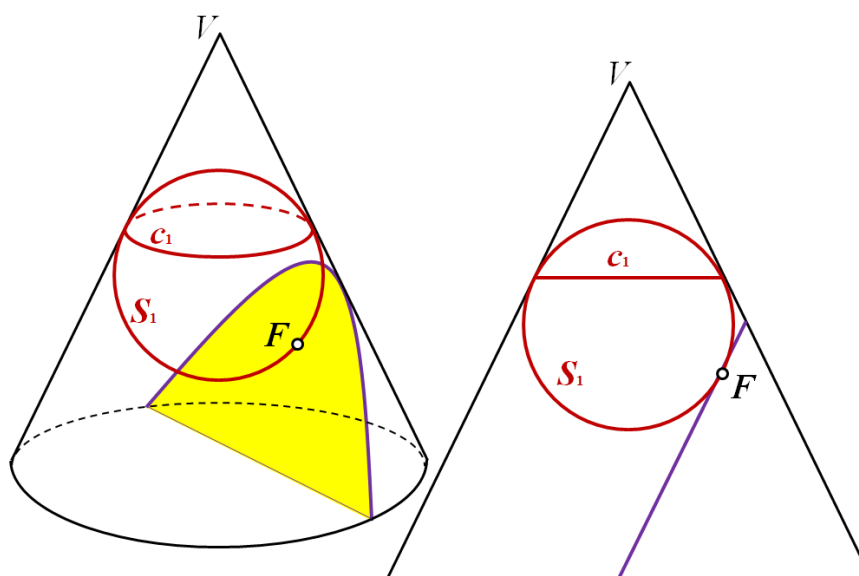


Fig.1.31 - Perspectiva tridimensional e perspectiva segundo corte transversal das esferas de Dandelin relativas à parábola

1.3.3. A origem das diretrizes de uma cónica

Com exceção do círculo (caso particular de uma elipse) qualquer cónica tem pelo menos uma diretriz. Na Fig.1.32 temos a ilustração do modo como se pode construir essa diretriz.

Consideramos uma esfera S inscrita no cone e tangente ao plano secante π que determina a cónica. A esfera S intersecta o cone ao longo de uma circunferência c , circunferência essa contida num plano τ , que intersectará π segundo a reta d . A reta d é uma diretriz da cónica.

Notemos que a cónica é um círculo quando τ e π são paralelos e, nesse caso, a diretriz não existe.

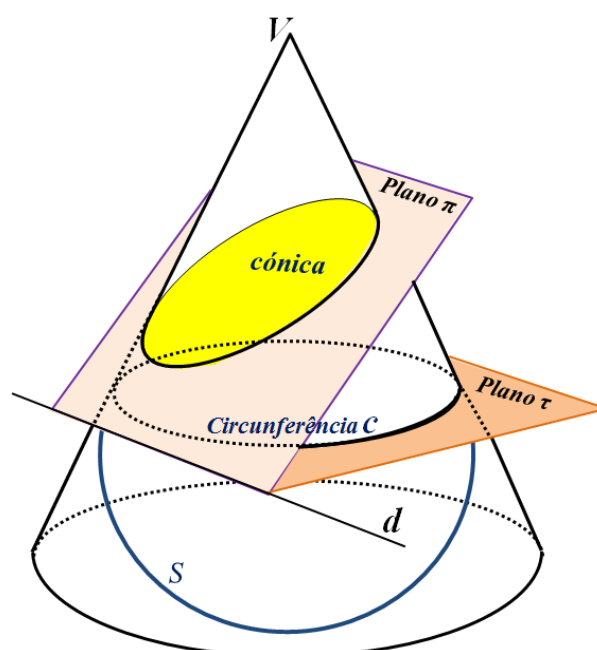


Fig.1.32 - Diretriz d de uma cónica

1.3.4. A excentricidade de uma cônica

A excentricidade é uma propriedade que emerge de uma abordagem da cônica como lugar geométrico ocupado por um ponto P , movendo-se num plano de tal modo que a razão das suas distâncias a um ponto fixo F (foco) e a uma reta fixa d (diretriz) seja constante. A essa razão constante chama-se excentricidade. Representamo-la por e (não confundir com o número de Euler e), e escreve-se $e = \frac{PF}{PD}$, sendo D o pé da perpendicular baixada de P sobre a diretriz d . A definição apresentada para a excentricidade, estabelece uma característica definidora para a própria cônica.

Definição 1.1. Dados uma reta d , um ponto F não pertencente a d e um número positivo e , seja D um ponto de d tal que PD representa a distância de um ponto P a d . O conjunto de todos os pontos P verificando a relação

$$PF = e PD \quad (1.4)$$

diz-se uma secção cônica com excentricidade e .

Na abordagem sintética desenvolvida por Dandelin, prova-se que se $e = \frac{PF}{PD}$ então $e = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}$,

onde α é a amplitude do ângulo definido pela geratriz e pelo eixo do cone e β a amplitude do ângulo que o plano secante faz com o eixo do cone, conforme podemos observar na Fig.1.33 (ver também a Fig.1.22 e a Fig.1.23).

Na Fig.1.33 observamos que

- o ponto P pertence à cônica;
- o ponto R pertence à circunferência c (intersecção da esfera S com o cone);
- o ponto Q é a projeção ortogonal de P sobre o plano τ (PQ é paralelo ao eixo do cone);
- o ponto D é um ponto da diretriz d tal que PD é perpendicular a d ;
- os triângulos $[PQD]$ e $[PQR]$ são ambos retângulos no vértice Q .

Da resolução trigonométrica dos triângulos $[PQD]$ e $[PQR]$ deduzimos que

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{PQ}{PR} \\ \cos \beta = \frac{PQ}{PD} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} PQ = PR \cos \alpha \\ PQ = PD \cos \beta \end{cases}$$

Portanto, $PR \cos \alpha = PD \cos \beta$

Como $PR = PF$ (são tangentes a S) virá

$$PF \cos \alpha = PD \cos \beta \Leftrightarrow \frac{PF}{PD} = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \Leftrightarrow e = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}$$

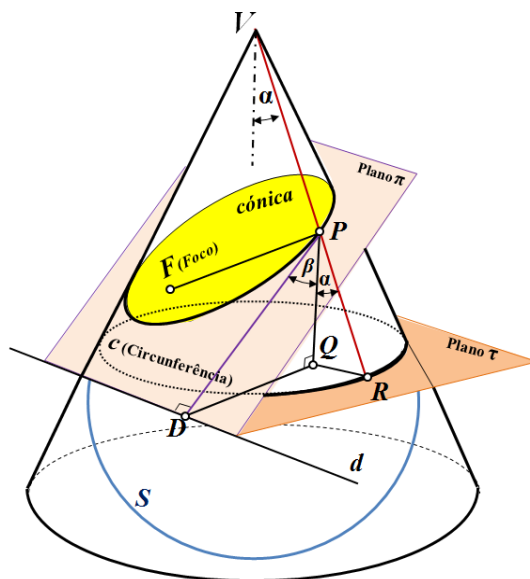


Fig.1.33 - Esquema da excentricidade

Uma análise algébrica da condição $e = \frac{PF}{PD}$ (seguindo métodos modernos) permite obter a representação gráfica da Fig.1.34. Para tal foi utilizada a equação $(1-e^2)x^2 - 4px + y^2 + 4p = 0$, onde e representa a excentricidade. (Esta equação será devidamente explicada na abordagem analítica das cônicas que desenvolveremos mais adiante). As linhas da Fig.1.34 foram geradas no GeoGebra em função dos seletores e e p .

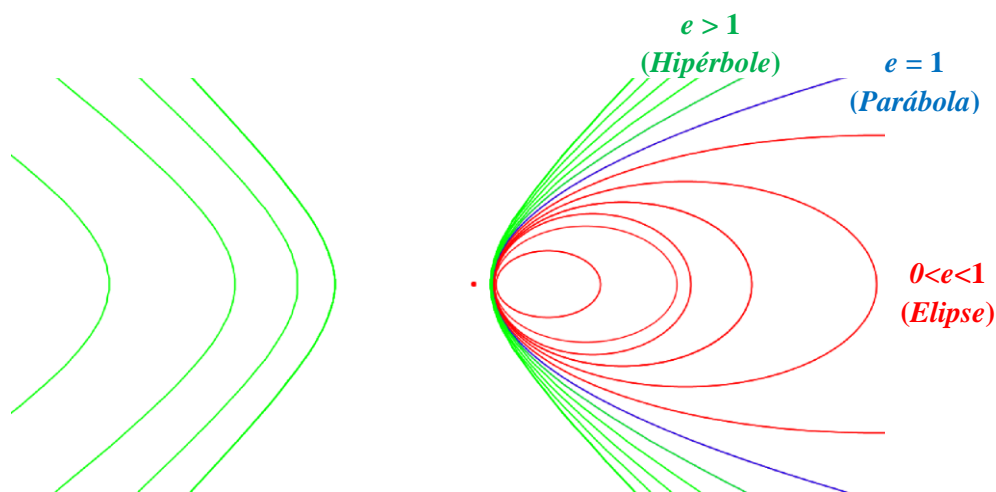


Fig.1.34 -Variação da excentricidade e as cônicas

Dessa análise podemos concluir que

- se $0 < e < 1$ a cônica é uma elipse;
- se $e > 1$ a cônica é uma hipérbole;
- se $e = 1$ a cônica é uma parábola;
- se $e = 0$ a cônica é uma circunferência.

1.3.5. Os fundamentos da definição focal das cónicas

Nas proposições que se seguem estabelecemos as condições definidoras para as cónicas no âmbito da abordagem sintética desenvolvida por Dandelin.

Proposição1.1: Se a cónica é uma elipse de focos F_1 e F_2 , então

$$PF_1 + PF_2 = \text{constante}$$

com P um ponto qualquer da elipse.

Demonstração:

Na Fig.1.35 as esferas S_1 e S_2 estão nas condições indicadas por Dandelin, isto é, inscritas no cone e tangentes ao plano secante gerador da cónica.

A reta VP é uma geratriz do cone, logo é tangente às esferas S_1 e S_2 nos pontos T_1 e T_2 , respetivamente.

Como

$$PT_1 = PF_1 \text{ e } PT_2 = PF_2^4$$

somando membro a membro resulta

$$PF_1 + PF_2 = PT_1 + PT_2$$

Mas $PT_1 + PT_2$ é constante uma vez que $PT_1 + PT_2 = T_1T_2$, que representa uma distância fixa. Por conseguinte fica demonstrado ser $PF_1 + PF_2 = \text{constante}$ ■

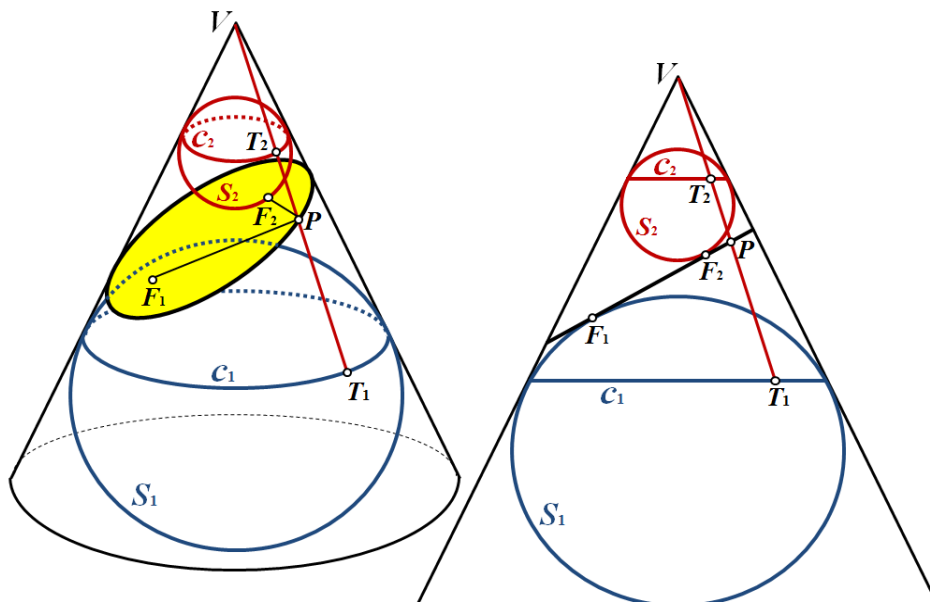
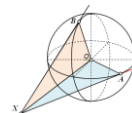


Fig.1.35 - "Sintoma" da elipse segundo Dandelin (Tridimensionalmente e segundo corte transversal)

⁴ Se duas retas AX e BX (concorrentes em X) são tangentes à uma superfície esférica, de centro O , nos pontos A e B , respetivamente, então os triângulos $[AOX]$ e $[BOX]$ são congruentes e, portanto, $AX = BX$.



Proposição1.2: Se a cônica é uma hipérbole de focos F_1 e F_2 , então

$$|PF_1 - PF_2| = \text{constante}$$

com P um ponto qualquer da hipérbole.

Demonstração:

Na Fig.1.36 as esferas S_1 e S_2 estão nas condições indicadas por Dandelin, isto é, inscritas no cone e tangentes ao plano secante gerador da cônica.

A reta VP é uma geratriz do cone, logo é tangente às esferas S_1 e S_2 nos pontos T_1 e T_2 , respectivamente.

Como

$$PT_1 = PF_1 \text{ e } PT_2 = PF_2$$

subtraindo membro a membro resulta

$$|PF_1 - PF_2| = |PT_1 - PT_2|.$$

Mas $|PT_1 - PT_2|$ é constante uma vez que $|PT_1 - PT_2| = T_1T_2$, que representa uma distância fixa. Por conseguinte fica demonstrado ser $|PF_1 - PF_2| = \text{constante}$ ■

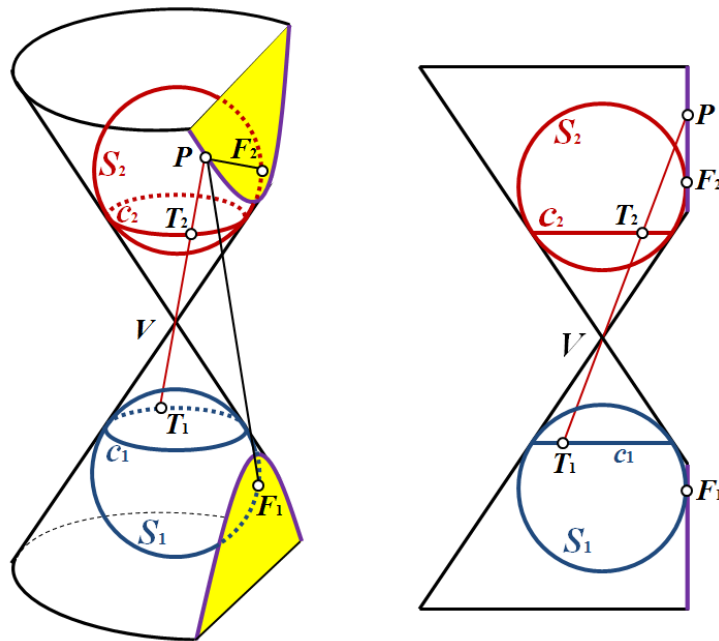


Fig.1.36 -“Sintoma” da hipérbole segundo Dandelin (Tridimensionalmente e segundo corte transversal)

Proposição1.3: Se a cônica é uma parábola de foco F e diretriz d (Fig.1.37), então

$$PF = PD$$

Demonstração:

Partindo da relação (1.4) da definição1.1 e tendo em conta que a parábola é uma cônica de excentricidade 1, obteremos $PF = PD$ a partir da condição $PF = e PD$ fazendo $e = 1$.

Fica assim demonstrada a proposição ■

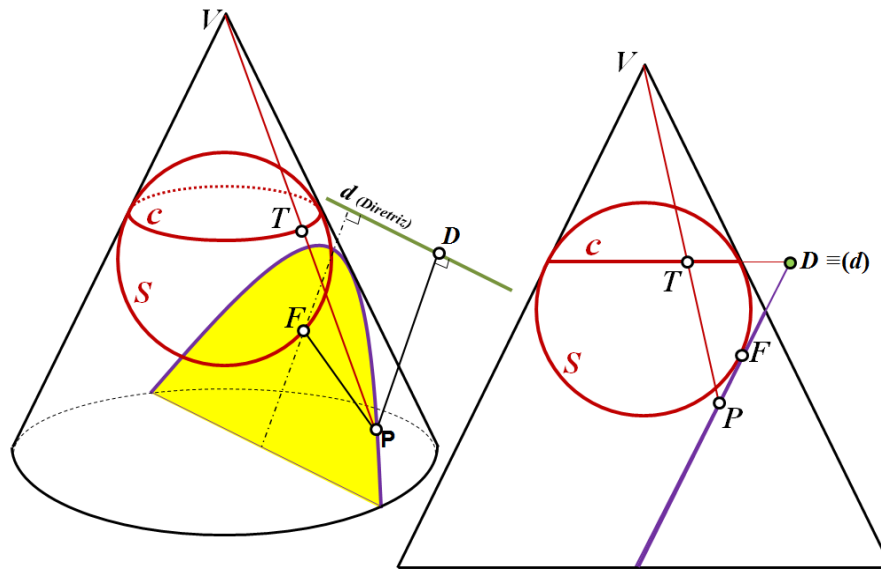


Fig.1.37 - Sintoma da parábola segundo Dandelin. (Tridimensionalmente e segundo corte transversal)

Ficou demonstrado nas três proposições que as propriedades focais das cónicas são consequência das definições usuais que delas são apresentadas na generalidade das literaturas sobre o tema. A Dandelin cabe o mérito de, por meio das suas esferas, ter feito a localização objetiva dos focos e das diretrizes.

Capítulo 2

Abordagem Analítica das Cônicas

Atribui-se a René Descartes (1596-1650) a paternidade do método da Geometria Analítica. Descartes, também conhecido por pai da filosofia moderna, redigiu na sua famosa obra ``*Discours de la Méthode*`, publicada em 1637 em Leyden, na Holanda, um apêndice denominado *La Géométrie*, onde apresenta as ideias fundamentais sobre a resolução dos problemas geométricos usando coordenadas (sistema cartesiano) e equações algébricas. Consta entretanto, que Descartes nada fez de significativo em relação àquilo que se entende hoje por Geometria Analítica. Segundo Boyer (1996, p.237) a “geometria analítica” preconizada por Descartes estava longe das considerações práticas que hoje tão frequentemente se associam ao uso de coordenadas. Descartes não chegou sequer a deduzir a equação de uma reta, ficando esse mérito creditado a Pierre de Fermat (1601-1665), conforme testemunha o seu manuscrito de 1629 ``*Ad locos planos et sólidos isagoge*” (Introdução aos lugares planos e sólidos). Segundo Boyer (1996, p.238) Fermat começou com a equação linear e escolheu um sistema de coordenadas arbitrário sobre o qual a esboçou. O método enuncia-se assim:

A cada ponto P do plano corresponde um par ordenado (x, y) de números reais, designado por coordenadas do ponto P . Dessa correspondência resulta a identificação do plano (o plano cartesiano) como \mathbb{R}^2 (conjunto dos pares ordenados dos números reais). Uma curva pode, assim, ser definida como o conjunto de pontos que gozam de uma mesma propriedade, ou seja, como um lugar geométrico.

2.1. Equação cartesiana geral de uma cônica

Começemos por recordar a definição 1.1 do capítulo 1. Denomina-se cônica o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja razão entre as distâncias a um ponto fixo F e a uma reta fixa d é igual a uma constante não negativa e . O ponto fixo é chamado foco, a reta fixa diretriz e a razão constante excentricidade da cônica. Quando $e = 1$ a cônica é uma parábola, quando $0 < e < 1$ é uma elipse e quando $e > 1$ uma hipérbole.

Se uma curva c é uma cônica (distinta de uma circunferência) com excentricidade e , diretriz d e foco associado F , então para todo o ponto P da cônica, $PF = ePD$, sendo D o ponto da diretriz tal que PD representa a distância de P a d .

Assim, adotando um sistema cartesiano ortonormado de coordenadas xOy , e considerando

o ponto $F(x_0, y_0)$ para foco, a reta $d: ax + by + c = 0$ para diretriz e a constante $e \geq 0$ para excentricidade temos, de acordo com a definição de cônica $\frac{PF}{PD} = e$, que

$$\frac{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}{\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}} = e \quad (2.1)$$

Teremos sucessivamente

$$\frac{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}{\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}} = e$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = \frac{e}{\sqrt{a^2+b^2}} |ax+by+c|$$

$$\Leftrightarrow (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \frac{e^2}{a^2+b^2} (ax+by+c)^2$$

$$\Leftrightarrow (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = (kax+kby+kc)^2, \text{ com } k^2 = \frac{e^2}{a^2+b^2}$$

$$\Leftrightarrow (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = (px+qy+r)^2, \text{ com } \begin{cases} p=ka \\ q=kb \\ r=kc \end{cases}$$

Desenvolvendo a igualdade, obtemos uma equação do tipo

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \text{ com } \begin{cases} A = 1 - p^2 \\ B = -2pq \\ C = 1 - q^2 \\ D = -2(x_0 + pr) \\ E = -2(y_0 + qr) \\ F = x_0^2 + y_0^2 - r^2 \end{cases}$$

À equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ chama-se equação cartesiana geral das cônicas.

Em geral, uma equação do tipo

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (2.2)$$

pode representar pontos, retas, círculos, parábolas, elipses e hipérboles.

Um exemplo:

Para um determinado sistema de coordenadas cartesianas consideremos o foco $F(3,3)$ e a diretriz $d: x + y - 1 = 0$. Definimos a parábola

$$\begin{aligned}
\frac{PF}{\text{dist}(P,d)} &= 1 \\
\Leftrightarrow \frac{\sqrt{(x-3)^2 + (y-3)^2}}{\frac{|x+y-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}} &= 1 \\
\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-3)^2 &= \frac{1}{2}(x+y-1)^2 \\
\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 6y + 9 &= \frac{1}{2}(x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1) \\
\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy - 10x - 10y + 35 &= 0.
\end{aligned}$$

A forma padrão da equação de uma cônica depende da escolha do sistema de eixos coordenados. Há, no entanto, uma relação entre elas.

Consideremos o sistema de coordenadas cartesianas ortogonais para o plano, em que o eixo $\hat{O}\hat{x}$ contém o foco F e é perpendicular à diretriz d e o eixo $\hat{O}\hat{y}$ coincide com a diretriz. Seja \hat{O} a origem desse sistema de coordenadas (Fig.2.1).

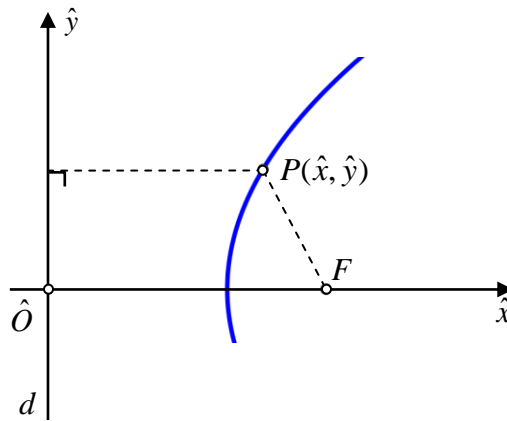


Fig.2.1 - Cônica num determinado referencial

Sendo p tal que $\hat{O}F = 2p$ e usando a definição 1.1 temos que um ponto P de coordenadas (\hat{x}, \hat{y}) , nesse sistema de coordenadas, pertence à cônica de diretriz d , foco F e excentricidade e se e somente se,

$$\frac{PF}{\text{dist}(P,d)} = e \text{ ou, equivalentemente,}$$

$$\left[\frac{\sqrt{(\hat{x}-2p)^2 + (\hat{y}-0)^2}}{|\hat{x}|} \right]^2 = e^2$$

Desenvolvendo e simplificando essa igualdade obtemos a equação cartesiana das cônicas em função dos parâmetros p e e :

$$(1-e^2)\hat{x}^2 - 4p\hat{x} + \hat{y}^2 = -4p^2 \quad (2.3)$$

Procederemos de seguida às deduções para cada uma das cônicas.

2.1.1. Equação da parábola

Numa parábola arbitrária consideramos os seguintes elementos (Fig.2.2):

- foco: o ponto F ;
- diretriz: a reta d ;
- eixo de simetria: a reta r perpendicular à diretriz passando pelo foco F ;
- vértice: o ponto V de interseção do eixo de simetria com a parábola.

De acordo com a definição 1.1. uma equação da parábola é dada pela relação

$$\text{dist}(P, F) = \text{dist}(P, d).$$

Escolhamos um sistema de coordenadas para o plano nas seguintes condições (metodologia usual):

- eixo Ox : reta perpendicular à diretriz d passando por F ;
- eixo Oy : mediatriz do segmento FD' , em que D' é a interseção do eixo Ox com a reta d .

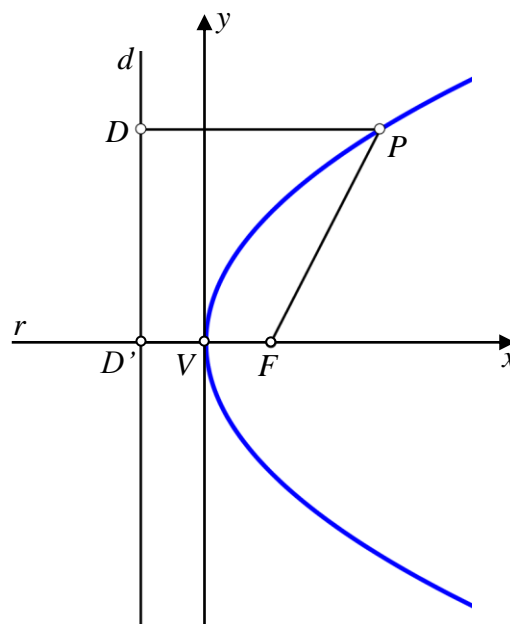


Fig.2.2 - Parábola num referencial cartesiano

Fazendo $FD' = 2p$ temos para a diretriz $d : x + p = 0$ e para o foco F as coordenadas $(p, 0)$.

Deste modo, um ponto $P(x, y)$ está na parábola se, e somente se,

$$\sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2} = \frac{|x+p|}{\sqrt{1+0}}$$

da qual se deduz a equação reduzida $y^2 = 4px$, com $x \geq 0$, $p > 0$.

Outro processo consiste em partir da equação (2.3) e fazer $e = 1$.

$$(1-1^2)\hat{x}^2 - 4p\hat{x} + \hat{y}^2 = -4p^2$$

A equação reduz-se à forma $\hat{y}^2 = 4p(\hat{x} - p)$

Realizando uma translação de eixos coordenados de modo que o ponto $(p, 0)$ passe a ser a origem, obtemos um novo sistema de coordenadas cartesianas Oxy em que valem as seguintes

relações entre as coordenadas dos dois sistemas:
$$\begin{cases} \hat{x} = x + p \\ \hat{y} = y \end{cases}$$

Resulta daí a equação reduzida $y^2 = 4px$ no sistema de coordenadas (x, y) .

2.1.2. Equação da elipse

Numa caracterização usual, uma elipse arbitrária pode apresentar-se a partir dos seus elementos e propriedades (Fig.2.3):

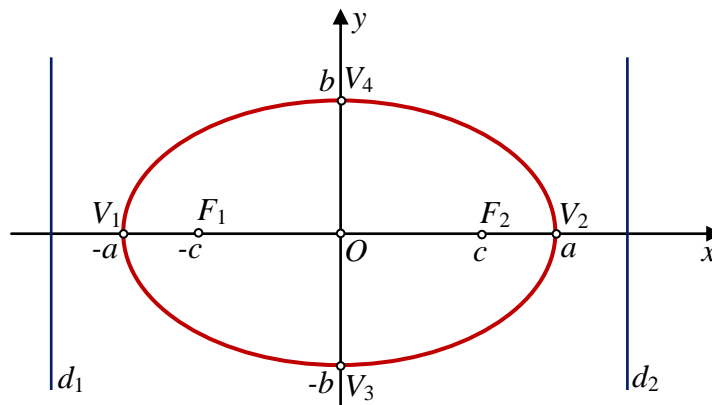


Fig.2.3 - Elipse num referencial cartesiano

- focos: os pontos F_1 e F_2 ;
- vértices: V_1 e V_2 , interseção da elipse com a reta passando pelos focos F_1 e F_2 ;
- vértices : V_3 e V_4 , interseção da elipse com a mediatriz do segmento V_1V_2 ;
- eixo maior : segmento V_1V_2 de comprimento $\overline{V_1V_2} = 2a$;
- eixo menor : segmento V_3V_4 de comprimento $\overline{V_3V_4} = 2b$;
- distância focal: distância entre os focos $\overline{F_1F_2} = 2c$;
- centro O : interseção dos segmentos V_1V_2 e V_3V_4 ;

- excentricidade: $e = \frac{c}{a}$
- diretrizes: retas d_1 e d_2 perpendiculares à reta que contém os focos, e a uma distância $\frac{a}{e}$ do centro.

Usualmente, a elipse é caracterizada como o lugar geométrico dos pontos P do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2 (focos), do mesmo plano, é constante e igual a $2a$.

$$\text{dist}(P, F_1) + \text{dist}(P, F_2) = 2a, \text{ com } a > c.$$

De acordo com o sistema de eixos da Fig.2.3, uma elipse satisfaz a condição

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Donde

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \right)^2 &= \left(2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right)^2 \\ (x+c)^2 + y^2 &= \left[4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \right] \\ a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= a^2 - cx \\ a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 &= a^4 - 2a^2xc + c^2x^2 \\ (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 &= a^2(a^2 - c^2) \end{aligned}$$

Como $a > c$, fazendo $a^2 - c^2 = b^2$ na igualdade acima e dividindo membro a membro por a^2b^2 , obtém-se a equação reduzida da elipse com focos sobre o eixo Ox

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Outro processo para obter a equação da elipse consiste em proceder a partir da equação (2.3). Uma vez que a elipse possui excentricidade e , com $0 < e < 1$, tem-se, $1 - e^2 > 0$. Dividindo a equação (2.3) por $1 - e^2$ obtemos

$$\hat{x}^2 - \frac{4p}{1-e^2} \hat{x} + \frac{\hat{y}^2}{1-e^2} = \frac{-4p^2}{1-e^2}$$

Operando os quadrados obtemos, em sucessivas simplificações

$$\begin{aligned} \left(\hat{x} - \frac{2p}{1-e^2} \right)^2 + \frac{\hat{y}^2}{1-e^2} &= \frac{4p^2}{1-e^2} \left(\frac{1}{1-e^2} - 1 \right) \\ \left(\hat{x} - \frac{2p}{1-e^2} \right)^2 + \frac{\hat{y}^2}{1-e^2} &= \frac{4p^2e^2}{(1-e^2)^2} \end{aligned}$$

$$\left(\hat{x} - \frac{2p}{1-e^2}\right)^2 + \frac{\hat{y}^2}{1-e^2} = \left(\frac{2pe}{1-e^2}\right)^2$$

Divide-se, finalmente, membro a membro, pela expressão $\left(\frac{2pe}{1-e^2}\right)^2$

$$\frac{\left(\hat{x} - \frac{2p}{1-e^2}\right)^2}{\left(\frac{2pe}{1-e^2}\right)^2} + \frac{\hat{y}^2}{\left(\frac{2pe}{\sqrt{1-e^2}}\right)^2} = 1$$

Realizando uma translação de eixos coordenados de modo que o ponto $\left(\frac{2p}{1-e^2}, 0\right)$ passe a ser a origem, obtemos um novo sistema de coordenadas cartesianas Oxy em que valem as seguintes

relações entre as coordenadas dos dois sistemas:
$$\begin{cases} \hat{x} = x + \frac{2p}{1-e^2} \\ \hat{y} = y \end{cases}$$

Fazendo $\frac{2pe}{1-e^2} = a$ e $\frac{2pe}{\sqrt{1-e^2}} = b$, resulta a equação reduzida da elipse no sistema de coordenadas (x, y)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Na equação obtida, há que assegurar que $a > b$. Sendo $0 < e < 1$, temos $1-e^2 < \sqrt{1-e^2}$ e, portanto,

$$\frac{2pe}{1-e^2} > \frac{2pe}{\sqrt{1-e^2}}.$$

2.1.3. Equação da hipérbole

Numa hipérbole arbitrária consideramos os seguintes elementos (figura 2.4):

- Focos: os pontos F_1 e F_2 ;
- Vértices: V_1 e V_2 , interseção da hipérbole com a reta que passa pelos focos F_1 e F_2 ;
- Eixo focal: segmento V_1V_2 de comprimento $\overline{V_1V_2} = 2a$;
- Eixo transverso: segmento V_3V_4 de comprimento $\overline{V_3V_4} = 2b$;
- Distância focal: distância entre os focos $\overline{F_1F_2} = 2c$;
- Centro O : interseção dos segmentos V_1V_2 com a sua mediatriz ;

- Excentricidade: $e = \frac{c}{a}$
- Diretrizes: retas d_1 e d_2 perpendiculares à reta que contém os focos e que estão a uma distância $\frac{a}{e}$ do centro.
- Assíntotas: retas suportes das diagonais do retângulo determinado pelas retas paralelas aos eixos da hipérbole passando pelos pontos V_1 , V_2 , V_3 e V_4 .

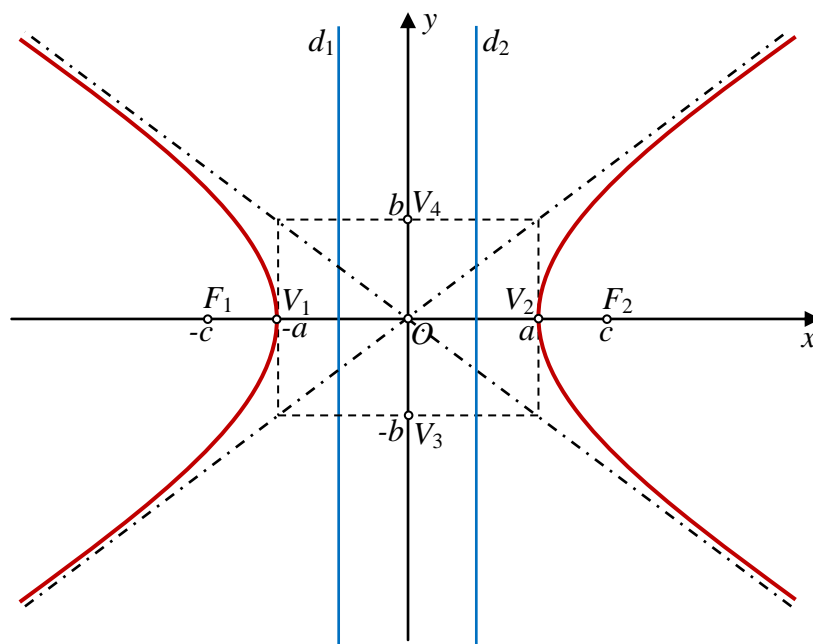


Fig.2.4 - Hipérbole num referencial cartesiano

A hipérbole é o lugar geométrico dos pontos P de um plano cujo módulo da diferença das distâncias a dois pontos fixos (focos), do mesmo plano, é constante e igual a $2a$.

$$|dist(P, F_1) - dist(P, F_2)| = 2a, \text{ com } a < c$$

Para obter uma equação da hipérbole seguimos um procedimento análogo ao utilizado para a elipse. Resultará

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ sendo } c^2 = a^2 + b^2$$

Essa hipérbole intersesta apenas o eixo Ox nos pontos $V_1(-a, 0)$ e $V_2(a, 0)$ e apresenta simetria relativamente a ambos os eixos coordenados.

As retas de equação $y = \frac{b}{a}x$ e $y = -\frac{b}{a}x$ são as assintotas da hipérbole.

2.2. Identificação e classificação das cónicas a partir de uma equação do 2.º grau

Um dos problemas fundamentais da Geometria Analítica é reconhecer um objeto geométrico a partir da sua equação cartesiana. Dada a equação cartesiana geral de uma cónica

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad (2.4)$$

interessa-nos saber a curva que ela representa. A resposta depende naturalmente das constantes A , B , C , D , E e F que aparecem na equação. O procedimento geral passará sempre pela discussão, redução e identificação daquela equação. A parte substancial do procedimento é a relativa ao processo de redução da mesma. Uma equação pode ser simplificada através de uma transformação adequada dos eixos coordenados, o que pode ser efetuado em duas etapas: uma, chamada translação de eixos; outra, chamada rotação de eixos. Nas secções seguintes trataremos dessas operações geométricas e o seu efeito prático nas simplificações que preconizamos.

2.2.1. Discussão da equação geral das cónicas

Uma primeira observação sobre a equação geral de uma cónica prende-se com a possibilidade dela se decompor no produto de dois fatores lineares. Nesse caso a equação representa uma cónica degenerada, ou seja, um ponto ou uma reta ou ainda um par de retas concorrentes. Para desenvolver uma discussão mais geral e consequente começaremos por efetuar algumas modificações estratégicas no formato da equação. Da igualdade

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

podemos escrever

$$(2Ax + By + D)^2 = (B^2 - 4AC)y^2 + 2(BD - 2AE)y + D^2 - 4AF.$$

Demonstração:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$\Leftrightarrow 4A(Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4A^2x^2 + 4ABxy + 4ACy^2 + 4ADx + 4AEy + 4AF = 0$$

$$\Leftrightarrow 4A^2x^2 + 4ABxy + 4ADx + B^2y^2 + 2BDy + D^2 = -4ACy^2 - 4AEy - 4AF + 2BDy + B^2y^2 + D^2$$

(Acrescentando os termos $2BDy$, B^2y^2 e D^2 a ambos os membros da igualdade)

$$\Leftrightarrow (2Ax + By + D)^2 = (B^2 - 4AC)y^2 + 2(BD - 2AE)y + D^2 - 4AF \quad \blacksquare$$

Concluimos daí que a cónica é degenerada, se

$$(B^2 - 4AC)y^2 + 2(BD - 2AE)y + D^2 - 4AF = 0 \quad (2.5)$$

possui raízes reais duplas

(binómio discriminante $[2(BD - 2AE)]^2 - 4(B^2 - 4AC)(D^2 - 4AF)$ nulo). Para isso devemos ter

$$\begin{aligned} &= 4(BD - 2AE)^2 - 4(B^2 - 4AC)(D^2 - 4AF) \\ &= -16A(4ACF + BDE - AE^2 - CD^2 - FB^2) = 0 \end{aligned}$$

ou, equivalentemente

$$4ACF + BDE - AE^2 - CD^2 - FB^2 = 0.$$

Podemos então escrever

$$(2Ax + By + D)^2 = (B^2 - 4AC)(y - y_0)^2,$$

sendo y_0 a raiz dupla do trinómio (2.5). Resolvendo esta equação em ordem a uma das variáveis obtemos

$$x = \frac{-(By + D) \pm \sqrt{(B^2 - 4AC)y^2 + 2(BD - 2AE)y + D^2 - 4AF}}{2A}, \text{ com } A \neq 0$$

À expressão

$$\Delta = 4ACF + BDE - AE^2 - CD^2 - FB^2$$

chamamos discriminante da equação de uma cónica, e à expressão

$$B^2 - 4AC$$

chamamos indicador da cónica.

Assim, quando $\Delta \neq 0$ a equação representa uma cónica não degenerada. Sintetizaremos mais adiante uma discussão detalhada sobre a identificação de cada uma das cónicas.

2.2.2. O processo de redução da equação geral das cónicas

Uma equação pode ser reduzida efetuando translações e/ou reflexões adequadas ao sistema de eixos coordenados. Nesta secção vamos mostrar como tal processo se operacionaliza para a equação geral das cónicas

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Pelo que já estudamos acerca das equações reduzidas das três cónicas, a forma mais simples que devemos exigir da equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ será, sem dúvida, $Ax^2 + Cy^2 + F = 0$,

ou seja, devemos eliminar, da equação geral, os termos em x , em y e em xy . Na prática, para eliminar o termo em x e o termo em y efetuamos uma translação aos eixos; para eliminar o termo em xy efetuamos uma rotação aos eixos.

Antes de prosseguirmos recordemos o processo de translação e o de rotação dos eixos coordenados.

2.2.2.1. O processo de translação dos eixos coordenados

Convém referir que a translação de eixos é uma operação que já utilizamos neste capítulo.

Sejam Oxy um sistema de eixos coordenados e $\overline{O}\overline{x}\overline{y}$ o novo sistema, resultante de Oxy através de uma translação segundo o vetor (h, k) (Fig.2.5). Os pares de eixos (Ox, Oy) e $(\overline{O}\overline{x}, \overline{O}\overline{y})$ são respetivamente paralelos.

Seja P um ponto qualquer do plano e admitamos que as suas coordenadas no sistema Oxy são (x, y) e no sistema $\overline{O}\overline{x}\overline{y}$ são $(\overline{x}, \overline{y})$. Vamos determinar x e y em função de \overline{x} , \overline{y} , h e k :

$$\begin{cases} x = MP = MM' + M'P = h + \overline{x} \\ y = NP = NN' + N'P = k + \overline{y} \end{cases}$$

As fórmulas de translação dos eixos coordenados passarão a ser as seguintes:

$$\begin{cases} x = \overline{x} + h \\ y = \overline{y} + k \end{cases}$$

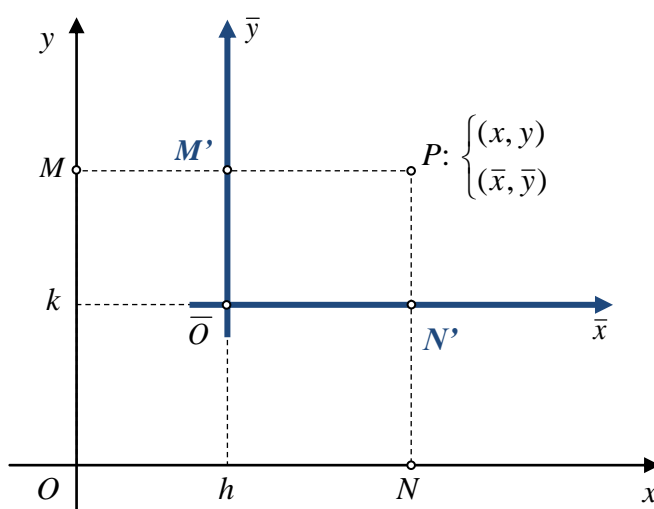


Fig.2.5 - Translação de eixos

2.2.2.2. O processo de rotação dos eixos coordenados

Sejam Oxy um sistema de eixos coordenados e $\hat{O}\hat{x}\hat{y}$ o novo sistema, resultante de Oxy através de uma rotação segundo um ângulo de amplitude θ (Fig.2.6). As origens O e \hat{O} dos dois sistemas são coincidentes.

Consideremos um ponto P qualquer do plano de coordenadas (x, y) no sistema Oxy e (\hat{x}, \hat{y}) no sistema $\hat{O}\hat{x}\hat{y}$. Determinemos x e y em função de \hat{x} , \hat{y} e θ :

$$\begin{cases} x = OM = ON - MN = \hat{x} \cos \theta - \hat{y} \sin \theta \\ y = MP = MM' + M'P = NN' + M'P = \hat{x} \sin \theta + \hat{y} \cos \theta \end{cases}$$

Portanto, as fórmulas de rotação dos eixos, segundo um ângulo θ , são

$$\begin{cases} x = \hat{x} \cos \theta - \hat{y} \sin \theta \\ y = \hat{x} \sin \theta + \hat{y} \cos \theta \end{cases}$$

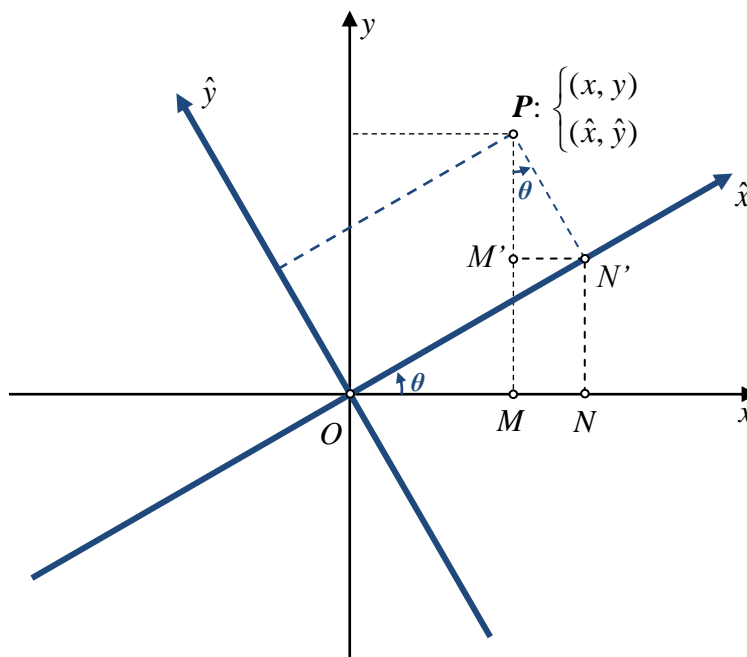


Fig.2.6 - Rotação de eixos

A proposição que se segue estabelece um procedimento prático para calcular a amplitude do ângulo que é necessário rodar o sistema eixos, conforme o pretendido.

Proposição 2.1. O ângulo θ de que é necessário rodar os eixos para eliminar o termo em xy da equação

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

pode ser calculado por intermédio da fórmula

$$\cotan(2\theta) = \frac{A-C}{B} \quad \text{ou} \quad \theta = \frac{1}{2} \operatorname{arccotan}\left(\frac{A-C}{B}\right)$$

Demonstração:

Comecemos por aplicar as fórmulas de rotação dos eixos $\begin{cases} x = \hat{x} \cos \theta - \hat{y} \sin \theta \\ y = \hat{x} \sin \theta + \hat{y} \cos \theta \end{cases}$

à equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. Obtemos a expressão

$$\hat{A}\hat{x}^2 + \hat{B}\hat{x}\hat{y} + \hat{C}\hat{y}^2 + \hat{D}\hat{x} + \hat{E}\hat{y} + \hat{F} = 0,$$

com

$$\begin{cases} \hat{A} = A \cos^2 \theta + B \cos \theta \sin \theta + C \sin^2 \theta \\ \hat{B} = B \cos(2\theta) - (A - C) \sin(2\theta) \\ \hat{C} = A \sin^2 \theta - B \cos \theta \sin \theta + C \cos^2 \theta \\ \hat{D} = D \cos \theta + E \sin \theta \\ \hat{E} = -D \sin \theta + E \cos \theta \\ \hat{F} = F \end{cases}.$$

Destas igualdades decorrem as seguintes relações entre os coeficientes das duas equações:

$$\begin{cases} \hat{A} + \hat{C} = A + C \\ \hat{A} - \hat{C} = B \sin(2\theta) + (A - C) \cos(2\theta) \\ \hat{B}^2 + (\hat{A} - \hat{C})^2 = B^2 + (A - C)^2 \\ \hat{B}^2 - 4\hat{A}\hat{C} = B^2 - 4AC \end{cases},$$

o que mostra que as expressões

$$\begin{cases} \hat{A} + \hat{C} = A + C \\ \hat{B}^2 + (\hat{A} - \hat{C})^2 = B^2 + (A - C)^2 \\ \hat{F} = F \end{cases}$$

são invariantes por rotação dos eixos.

Uma vez que a rotação dos eixos visa eliminar o termo em $\hat{x}\hat{y}$, igualamos o coeficiente \hat{B} a zero

$$\begin{aligned} \hat{B} &= B \cos(2\theta) - (A - C) \sin(2\theta) = 0 \\ \Leftrightarrow \cotan(2\theta) &= \frac{A - C}{B}, \end{aligned}$$

Operando as substituições

$$\cotan(2\theta) = \frac{\cotan^2 \theta - 1}{2 \cotan \theta} \quad \text{e} \quad \frac{A-C}{B} = \lambda$$

garantimos que a equação

$$\cotan(2\theta) = \frac{A-C}{B} \text{ possui duas soluções distintas, raízes da equação}$$

$$\cotan^2 \theta - 2\lambda \cotan \theta - 1 = 0$$

ou seja,

$$\cotan \theta = \lambda \pm \sqrt{1 + \lambda^2} \quad \text{com} \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

Fica, assim, provada a proposição ■

Refira-se que é indiferente a ordem com que se aplicam quer translação quer a rotação dos eixos. Atendendo ao decurso da prova da proposição 2.1, verificamos que, ao aplicar primeiro uma rotação segundo o ângulo θ , resultou a equação reduzida

$$\hat{A}\hat{x}^2 + \hat{C}\hat{y}^2 + \hat{D}\hat{x} + \hat{E}\hat{y} + \hat{F} = 0.$$

Operemos, agora, uma translação de eixos segundo o vetor de coordenadas (h, k) . As fórmulas de translação que estabelecem as relações entre as coordenadas de um ponto P , em relação ao sistema $\hat{O}\hat{x}\hat{y}$, com suas coordenadas em relação ao sistema $\overline{O}\overline{x}\overline{y}$ são,

$$\begin{cases} \hat{x} = \overline{x} + h \\ \hat{y} = \overline{y} + k \end{cases}$$

Aplicando essas relações à equação

$$\hat{A}\hat{x}^2 + \hat{C}\hat{y}^2 + \hat{D}\hat{x} + \hat{E}\hat{y} + \hat{F} = 0 \quad (2.6)$$

obtemos a sua equação cartesiana em relação ao sistema $\overline{O}\overline{x}\overline{y}$

$$\hat{A}\overline{x}^2 + \hat{C}\overline{y}^2 + \overline{D}\overline{x} + \overline{E}\overline{y} + \overline{F} = 0 \quad (2.7)$$

com

$$\begin{cases} \overline{D} = 2\hat{A}h + \hat{B}k + \hat{D} \\ \overline{E} = \hat{B}h + 2\hat{C}k + \hat{E} \\ \overline{F} = \hat{A}h^2 + \hat{B}hk + \hat{C}k^2 + \hat{D}h + \hat{E}k + \hat{F} \end{cases}$$

É notório que os coeficientes \hat{A} e \hat{C} dos termos de segundo grau na equação (2.7) são invariantes por translação de eixos (o coeficiente de xy sê-lo-ia também se tivéssemos operado, primeiro, a translação).

Para eliminar os termos em x e em y devemos igualar os respectivos coeficientes a zero:

$$\begin{cases} 2\hat{A}h + \hat{D} = 0 \\ \hat{E}Bh + 2\hat{C}h + \hat{E} = 0 \end{cases}$$

A solução desse sistema, a existir, fornecerá a translação que reduz a equação da cônica, no sistema $\overline{O}\bar{x}\bar{y}$, à forma

$$\hat{A}\bar{x}^2 + \hat{C}\bar{y}^2 + \bar{F} = 0.$$

Para exemplificar o processo que acabamos de descrever, consideremos a equação

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 - 4x + 4y - 4 = 0$$

$$(A=5, B=6, C=5, D=-4, E=5).$$

Mostraremos que essa equação pode, mediante traslações e rotações adequadas dos eixos coordenados, reduzir-se à forma simplificada

$$4\hat{x}^2 + \hat{y}^2 = 4 \quad \text{ou} \quad \frac{\hat{x}^2}{1^2} + \frac{\hat{y}^2}{2^2} = 1$$

permitindo identificar uma elipse com eixos sobre os eixos coordenados $\hat{O}\hat{x}\hat{y}$, com centro na nova origem \hat{O} , cujo semieixo maior mede 2 e o semieixo menor mede 1 (Fig.2.7).

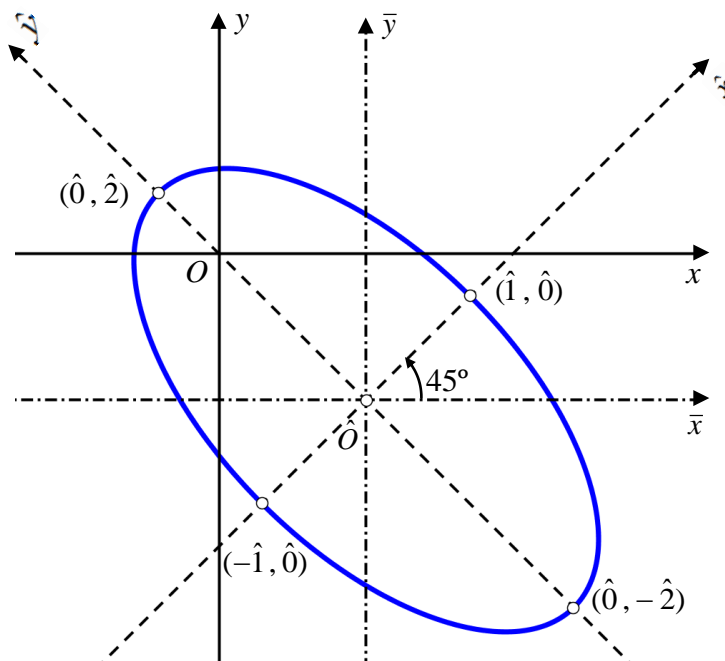


Fig.2.7 - Translação e rotação dos eixos coordenados na redução de equações

A translação é operada pela mudança
$$\begin{cases} x = \bar{x} + h \\ y = \bar{y} + k \end{cases}$$

$$5(\bar{x}+h)^2 + 6(\bar{x}+h)(\bar{y}+k) + 5(\bar{y}+k)^2 - 4(\bar{x}+h) + 4(\bar{y}+k) - 4 = 0$$

Desenvolvendo e agrupando convenientemente os termos, vem

$$5\bar{x}^2 + 6\bar{x}\bar{y} + 5\bar{y}^2 + (10h + 6k - 4)\bar{x} + (10k + 6h + 4)\bar{y} + 5h^2 + 6hk + 5k^2 - 4h + 4k - 4 = 0$$

Para eliminar os termos em x e em y igualamos os respectivos coeficientes a zero

$$\begin{cases} 10k + 6h + 4 = 0 \\ 10h + 6k - 4 = 0 \end{cases}.$$

A solução do sistema é $\begin{cases} h = 1 \\ k = -1 \end{cases}$.

A equação reduz-se então a

$$5\bar{x}^2 + 6\bar{x}\bar{y} + 5\bar{y}^2 = 8.$$

Para eliminar o termo em $\bar{x}\bar{y}$ rodamos os eixos segundo o ângulo θ calculado por intermédio da fórmula

$$\theta = \frac{1}{2} \operatorname{arccotan} \left(\frac{A-C}{B} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{arccotan} \left(\frac{5-5}{6} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{arccotan} (0) = 45^\circ$$

Aplicando as fórmulas de rotação $\begin{cases} \bar{x} = \hat{x} \cos \theta - \hat{y} \sin \theta \\ \bar{y} = \hat{x} \sin \theta + \hat{y} \cos \theta \end{cases}$

$$\text{temos } \begin{cases} \bar{x} = \hat{x} \cos 45^\circ - \hat{y} \sin 45^\circ \\ \bar{y} = \hat{x} \sin 45^\circ + \hat{y} \cos 45^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{x} = \frac{\hat{x} - \hat{y}}{\sqrt{2}} \\ \bar{y} = \frac{\hat{x} + \hat{y}}{\sqrt{2}} \end{cases}.$$

Substituindo na equação $5\bar{x}^2 + 6\bar{x}\bar{y} + 5\bar{y}^2 = 8$

$$5\left(\frac{\hat{x} - \hat{y}}{\sqrt{2}}\right)^2 + 6\left(\frac{\hat{x} - \hat{y}}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\hat{x} + \hat{y}}{\sqrt{2}}\right) + 5\left(\frac{\hat{x} + \hat{y}}{\sqrt{2}}\right)^2 = 8.$$

Desenvolvendo e simplificando obtemos a equação final

$$4\hat{x}^2 + \hat{y}^2 = 4.$$

2.2.3. Identificação das cónicas

Resta-nos agora estabelecer um critério que permita identificar cada uma das cónicas a partir da equação geral. O teorema que se segue sintetiza o nosso processo de discussão.

Teorema 2.1. Consideremos a equação do 2.º grau

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Uma vez determinados os valores do discriminante

$$\Delta = 4ACF + BDE - AE^2 - CD^2 - FB^2$$

e do indicador

$$I = B^2 - 4AC$$

tem-se:

- a) Se $\Delta = 0$ a equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ representa uma cônica degenerada;
- b) Se $\Delta \neq 0$ a equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ representa uma cônica não degenerada, que após uma rotação por um ângulo

$$\theta = \frac{1}{2} \operatorname{arccotan} \left(\frac{A-C}{B} \right)$$

seguida de uma translação de eixos, é representada por uma equação da forma

$$Ax^2 + Cy^2 + F = 0,$$

com

$$I = B^2 - 4AC = -4AC \text{ (uma vez que } B = 0 \text{)}.$$

Logo,

- i) Se $I < 0$ temos que A e C possuem sinais iguais, e trata-se de uma elipse;
- ii) Se $I > 0$ temos que A e C possuem sinais contrários, e trata-se de hipérbole;
- iii) Se $I = 0$ temos que $A = 0$ ou $C = 0$, e trata-se de uma parábola.

2.3. Equações das cônicas em coordenadas polares

Ficou clara a complexidade algébrica das várias expressões que serviram para traduzir analiticamente as cônicas. Justifica-se assim a existência de um outro sistema de coordenadas - Sistema de Coordenadas Polares - que não só simplifica as equações e o estudo destas linhas, como torna possíveis estudos mais avançados no âmbito de algumas aplicações, onde se destacam as Leis de Kepler e as Leis de Newton sobre a gravitação universal.

Para determinar a posição de um ponto em coordenadas polares toma-se como referencia um ponto fixo O (polo) e uma semirreta Ox (eixo polar) conforme se ilustra na Fig.2.8.

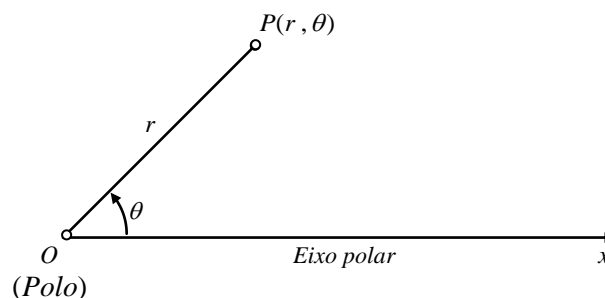


Fig.2.8 - Sistema de coordenadas polares

O segmento de reta OP de comprimento r designa-se por raio vetor e o ângulo de amplitude θ formado pelo eixo polar Ox e o segmento OP designa-se por ângulo polar. As coordenadas polares do ponto P são dadas pelo par ordenado (r, θ) .

Interessa-nos particularmente a relação entre coordenadas polares e cartesianas. Para tal fazemos coincidir o polo com a origem do referencial cartesiano e o eixo polar com semieixo positivo Ox .

Na Fig.2.9 o ponto P tem coordenadas cartesianas (x, y) e coordenadas polares (r, θ) .

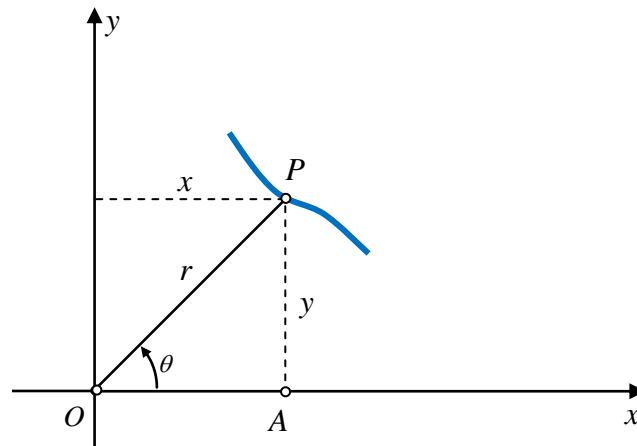


Fig.2.9 - Relação entre coordenadas polares e cartesianas

A partir do triângulo retângulo OAP deduzimos simultaneamente as seguintes relações:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ x^2 + y^2 = r^2 \\ \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} \end{cases}$$

ou, equivalentemente

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \end{cases}$$

Determinaremos as equações para as cónicas, em coordenadas polares, para duas situações distintas, conforme o posicionamento das diretrizes relativamente ao eixo polar.

- Primeiro caso: A diretriz é perpendicular ao eixo polar (Fig.2.10)

Seja P um ponto qualquer da cónica com as coordenadas polares (r, θ) .

Sejam também

$$p = \text{dist}(F, d),$$

$$FP = r$$

$$FA = r \cos \theta.$$

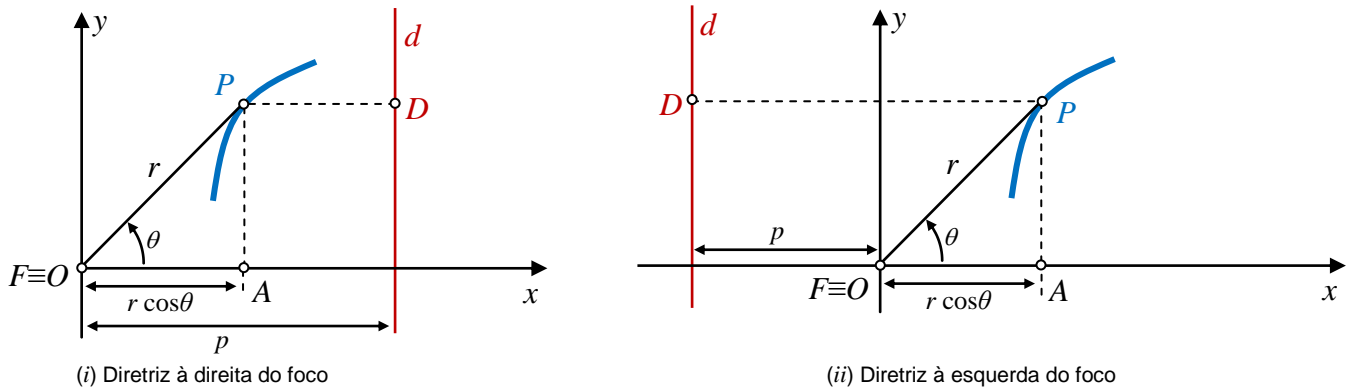


Fig.2.10 - Diretriz perpendicular ao eixo polar

Teremos

$$\begin{cases} PD = p - r \cos \theta & \text{se a diretriz se situar à direita do foco } F \text{ [(Fig.2.10(i))]} \\ PD = p + r \cos \theta & \text{se a diretriz se situar à esquerda do foco } F \text{ [(Fig.2.10(ii))].} \end{cases}$$

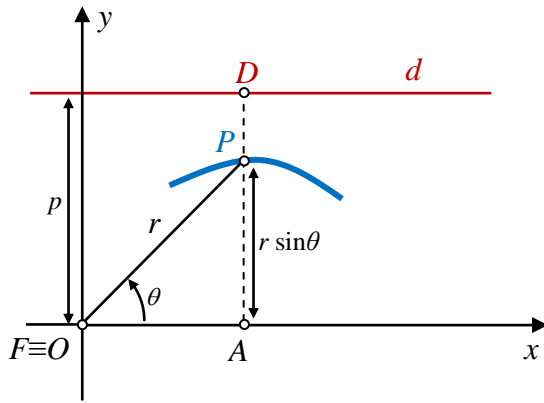
Partindo da Definição 1.1, $\frac{PF}{PD} = e$, onde e representa a excentricidade da cónica, obtém-se

$$\begin{cases} \frac{r}{p + r \cos \theta} = e & \text{se a diretriz se situar à direita do foco } F \\ \frac{r}{p - r \cos \theta} = e & \text{se a diretriz se situar à esquerda do foco } F. \end{cases}$$

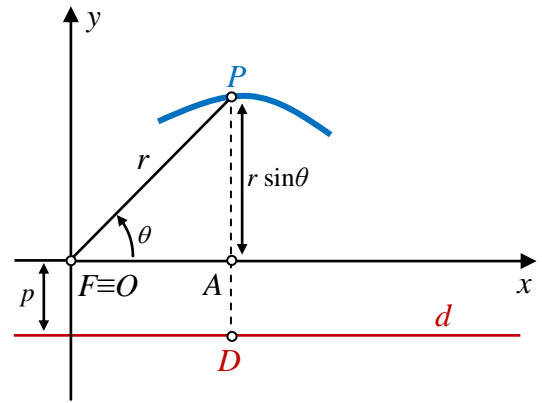
ou, de modo equivalente, a equação unificada

$$r = \frac{ep}{1 \pm e \cos \theta}, \quad (2.8)$$

- Segundo caso: A diretriz é paralela ao eixo polar (Fig.2.12)



(i) Diretriz acima do foco



(ii) Diretriz abaixo do foco

Fig.2.11 - Diretriz paralela ao eixo polar

De forma análoga estabeleceremos que as equações da cônica

$$\begin{cases} \frac{r}{p - r \sin \theta} = e & \text{se a diretriz se situar acima do foco } F \text{ [(Fig.2.11(i))]} \\ \frac{r}{p + r \sin \theta} = e & \text{se a diretriz se situar abaixo do foco } F \text{ [(Fig.2.11(ii))],} \end{cases}$$

ou, de modo equivalente, a equação unificada

$$r = \frac{ep}{1 \pm e \sin \theta}, \quad (2.9)$$

Resumimos a discussão no seguinte teorema:

Teorema 2.2 Uma equação polar de uma das formas

$$r = \frac{ep}{1 \pm e \cos \theta}, \quad r = \frac{ep}{1 \pm e \sin \theta}$$

é uma secção cônica. Além disso, a cônica é uma elipse se $0 < e < 1$, uma parábola se $e = 1$ e uma hipérbole se $e > 1$.

2.4. Quádricas de revolução – breve referência

A rotação de uma cônica de excentricidade e em torno de seu eixo focal gera uma superfície de revolução S_e . A caracterização dessa superfície como lugar geométrico do espaço \mathbb{R}^3 (conjunto dos ternos ordenados dos números reais) é análoga à das cônicas.

Sejam π um plano do espaço, F um ponto que não pertence ao plano π e $0 < e < 1$ um número real. A superfície S_e de foco F , diretriz π e excentricidade e é o lugar geométrico dos pontos $P(x, y, z)$ tais que

$$\frac{\text{dist}(P, F)}{\text{dist}(P, \pi)} = e$$

Fixado um referencial o.m. $Oxyz$ de modo que eixo Ox seja perpendicular ao plano π , tomemos $\pi: x=0$ e $F(2p, 0, 0)$. Assim, um ponto de coordenadas (x, y, z) pertence à superfície S_e se e somente se

$$\frac{\text{dist}(P, F)}{\text{dist}(P, \pi)} = \frac{\sqrt{(x-2p)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2}}{|x|} = e$$

donde podemos escrever

$$(1-e^2)x^2 - 4px + y^2 + z^2 = -4p^2. \quad (2.10)$$

Para $e=1$ temos a seguinte equação cartesiana para a superfície S_e :

$$y^2 + z^2 = 4p(x-p)$$

que representa um parabolóide de revolução (Fig.2.12).

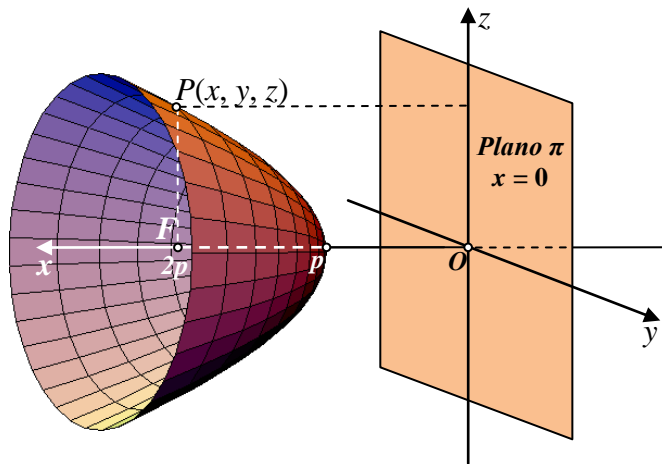


Fig.2.12 - Parabolóide de revolução

Para $0 < e < 1$ obtemos, após simplificação, a equação cartesiana para a superfície S_e :

$$\frac{\left(x - \frac{2p}{1-e^2}\right)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad \text{com} \quad \begin{cases} a = \frac{2pe}{1-e^2} \\ b = \frac{2pe}{\sqrt{1-e^2}} \end{cases}.$$

Temos um elipsoide de revolução (Fig.2.13).

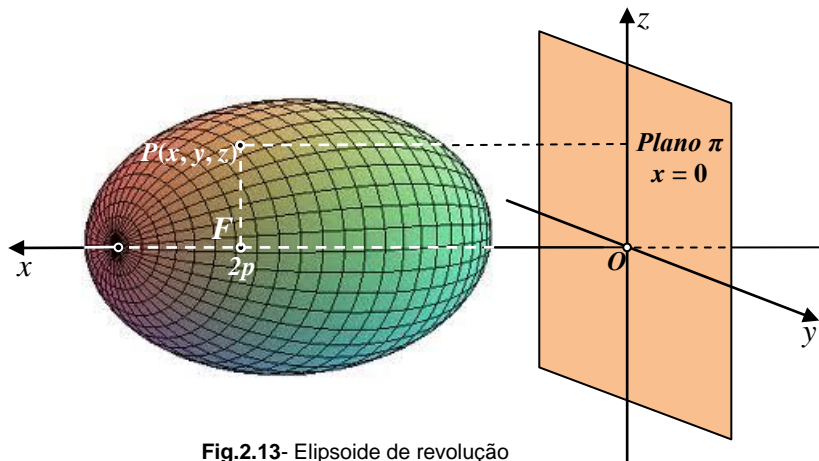


Fig.2.13- Elipsoide de revolução

Para $e > 1$ o número $1 - e^2$ é negativo e podemos reescrever a equação como

$$\frac{\left(x - \frac{2p}{1-e^2}\right)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad \text{com} \quad \begin{cases} a = \frac{2pe}{e^2-1} \\ b = \frac{2pe}{\sqrt{e^2-1}} \end{cases}.$$

Temos um hiperboloide de revolução (Fig.2.14).

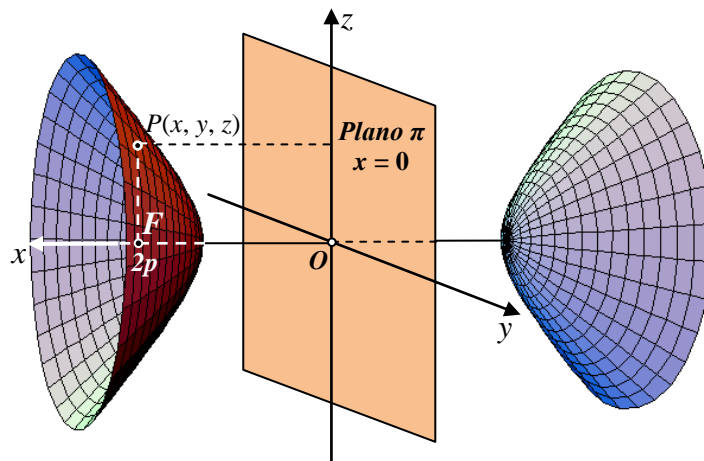


Fig.2.14- Hiperboloide de revolução

Resumindo:

- Para $e = 1$ a equação (2.9) representa um parabolóide de revolução;
- Para $0 < e < 1$ a equação (2.9) representa um elipsoide de revolução;
- Para $e > 1$ a equação (2.9) representa um hiperboloide de duas folhas de revolução.

2.5. Retas tangentes a uma cónica

Dada uma cónica de equação

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

e uma reta de equação

$$y = mx + b$$

podemos discutir a posição da reta relativamente à cónica resolvendo o sistema de equações

$$\begin{cases} Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \\ y = mx + b \end{cases}.$$

O resultado é uma equação quadrática

$$ax^2 + bx + c = 0$$

que terá, no máximo, duas soluções para as coordenadas x da interseção.

Na Fig.2.15 os pontos P e Q fixam a reta PQ secante à curva. Deslocando o ponto Q sobre a curva, aproximando-o de P , a secante PQ roda em torno do ponto P tendendo para a posição limite PT .

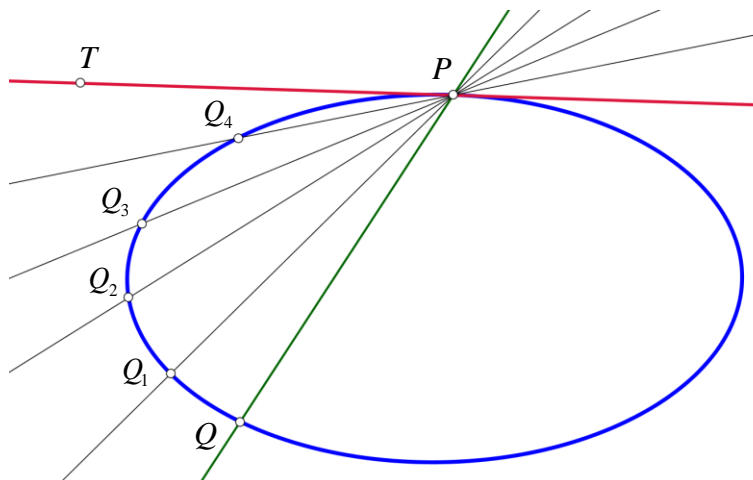


Fig.2.15 - Secantes e tangente a uma cónica

Definição 2.1. Sejam P e Q dois pontos da curva conforme se observa na Fig.2.15. Designamos por tangente à curva no ponto P à reta resultante da secante PQ quando esta tende para a posição limite PT .

Uma condição necessária e suficiente para que uma reta seja tangente a uma cónica num ponto P dessa curva é que a reta, menos o ponto P , esteja totalmente contida na região designada exterior da curva.

Uma caracterização mais precisa das tangentes a uma cónica pode enunciar-se nas seguintes proposições:

Proposição 2.2 (Tangente a uma parábola) Sejam P um ponto da parábola de foco F e diretriz d e D o pé da perpendicular à reta d passando por P . Se uma reta t é a bissetriz do ângulo FPD (e mediatriz do segmento FD), então essa reta é a tangente à parábola no ponto P (Fig.2.16).

Demonstração:

Sendo P um ponto da parábola (figura2.16), no triângulo $\triangle PFD$ temos $PF = PD$. Assim, a reta t , bissetriz do ângulo $\angle FPD$, é mediatriz do segmento FD pois o $\triangle PFD$ é isósceles. Por outro lado, uma parábola separa o plano em duas regiões: uma, onde cada ponto tem distância ao foco menor que sua distância à diretriz (interior da parábola) e outra onde a distância de cada ponto ao foco é maior que a distância à diretriz (exterior da parábola). Seja então Q um ponto qualquer do plano e a função f tal que $f(Q) = QF - QD'$ com D' o pé da perpendicular à reta d passando por Q . Temos que $f < 0$ no interior da parábola e $f > 0$ no exterior da parábola. Admitamos agora Q um ponto qualquer da reta t , distinto de P . Temos que $Q\hat{D}D' < Q\hat{D}'D$ e, portanto, $QF = QD > QD'$ ou seja, ao longo da reta t , $f \geq 0$. Concluímos assim que o ponto Q é exterior à parábola, pelo que, a reta t nunca cruza a parábola de uma região para outra. Logo, t é tangente à parábola no ponto P . ■

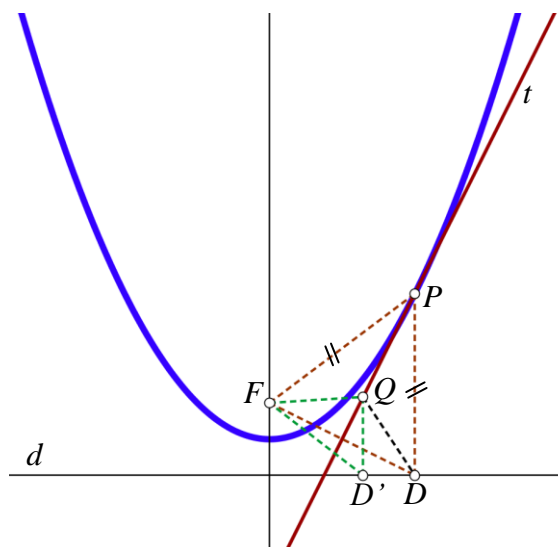


Fig.2.16 - Tangente a uma parábola

Proposição 2.3 (Tangente a uma elipse) Seja P um ponto de uma elipse de diretriz d e focos F_1 e F_2 . Se a reta t é bissetriz do ângulo determinado pela semirreta \vec{PE} , oposta à semirreta \vec{PF}_1 , então t é a tangente à elipse no ponto P (Fig.2.17).

Demonstração:

Recordemos que a elipse é o lugar geométrico dos pontos Q do plano que satisfazem a propriedade métrica $QF_1 + QF_2 = k$ (constante). À semelhança da parábola, a elipse separa os demais pontos do

plano em duas regiões: uma, onde cada ponto Q satisfaz $QF_1 + QF_2 < k$ (interior da elipse) e outra onde cada ponto Q satisfaz $QF_1 + QF_2 > k$ (exterior da elipse). Logo, uma reta será tangente à elipse no ponto P se, e somente se, intersectar a elipse em P e, qualquer que seja o ponto Q da reta distinto de P , se tenha: $QF_1 + QF_2 > k$. Ora, dado um ponto D da reta PF_2 tal que $PD = PF_1$, temos que o triângulo $\triangle DPF_1$ é isósceles, com a reta t mediatriz do segmento DF_1 e $QF_1 = QD$ (Fig.2.17). Segue da desigualdade triangular aplicada ao triângulo $\triangle DQF_2$ que

$$QF_1 + QF_2 = QD + QF_2 > DF_2 = DP + PF_2 = PF_1 + PF = k.$$

Fica provado que Q é exterior à elipse e a reta t é tangente à elipse no ponto P . ■

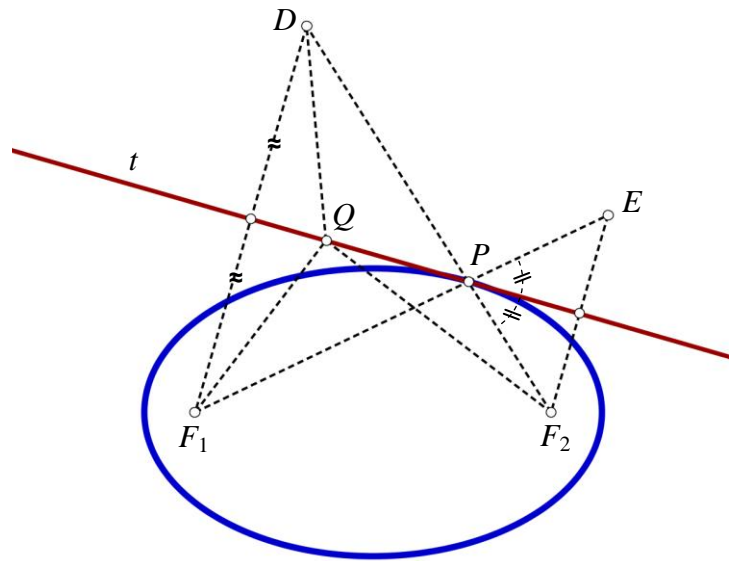


Fig.2.17 - Tangente a uma elipse

Proposição2.4 (Tangente a uma hipérbole) Consideremos uma hipérbole de diretriz d e focos F_1 e F_2 e um ponto P dessa hipérbole (Fig.2.18). Se a reta t é a bissetriz do ângulo determinado pelas semirretas $\dot{P}F_1$ e $\dot{P}F_2$, então t é a tangente à hipérbole no ponto P .

Demonstração:

A hipérbole é o lugar geométrico dos pontos Q que satisfazem a propriedade métrica, $|QF_1 - QF_2| = k$ (constante). Os dois ramos da hipérbole dividem os pontos do plano em três regiões: uma região compreendida entre os dois ramos (*exterior da hipérbole*), e outras duas que são internas a cada um dos ramos da hipérbole (chamá-la-emos de *interior da hipérbole*). Se definirmos a função f tal que $f(Q) = QF_1 - QF_2$ temos que

$f = \pm k$ representa a hipérbole;

$f < -k$ representa a região interior da hipérbole que contém F_1 ;

$-k < f < k$ representa a região compreendida entre os dois ramos da hipérbole;

$f > k$ representa a região interior da hipérbole que contém F_2 ;

Posto isto, teremos ao longo da reta t a condição $-k \leq f \leq k$, isto é, a reta t nunca cruzará a hipérbole de uma região para outra. Segue-se daí que t é tangente à hipérbole no ponto P ■

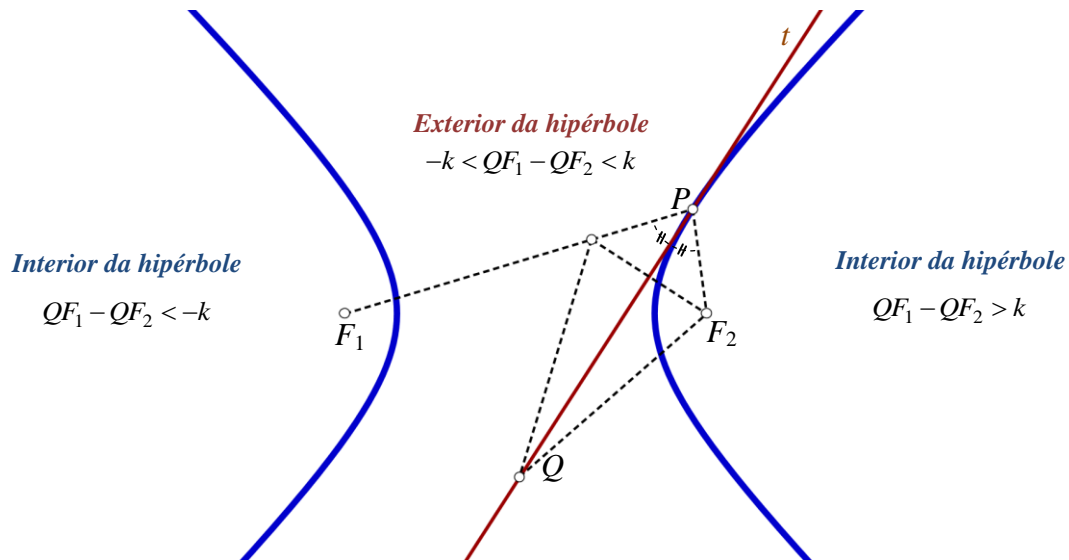


Fig.2.18 -Tangente a uma hipérbole

Capítulo 3

Abordagem projetiva das cónicas

3.1. As origens da Geometria Projetiva

Numa famosa revista de divulgação matemática - *Jogos de Engenho* (Orbbis Fabri), refere-se à criação da Geometria Projetiva como resultado de um audacioso “golpe de intuição”. Apresentam como exemplo disso a Fig.3.1 - um dispositivo onde o olho humano olha para o interior de uma pirâmide que contém uma distribuição caótica de peças geométricas, e o que vê é uma figura regular plana, graças à projeção das peças sobre a base da pirâmide.

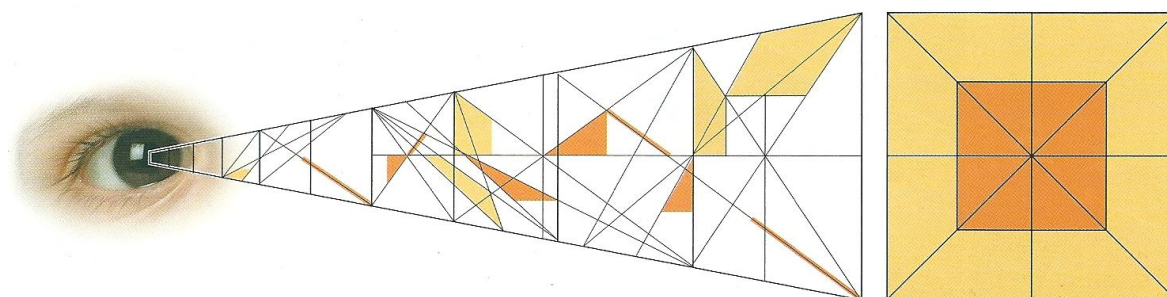


Fig.3.1 - Vista harmoniosa de uma distribuição caótica

Em linhas gerais, a Geometria Projetiva pode definir-se como a Geometria na qual se congregam as propriedades que permanecem invariantes quando se realiza uma projeção a partir de um ponto. Duas figuras geométricas consideram-se equivalentes se pode obter-se uma a partir da outra através de uma projeção. Por exemplo, na Fig.3.2 os pontos de uma circunferência c podem projetar-se, a partir de um ponto P , nos pontos de uma elipse e , isto é, dado um ponto A qualquer da circunferência c , obtém-se o correspondente ponto A' da elipse e traçando a reta que passa por P e por A e fazendo a sua interseção com a elipse. Reciprocamente, se partirmos de um ponto A' qualquer da elipse, a interseção da reta PA' com a circunferência dar-nos-á o correspondente ponto A . Hogendijk (1991, p.1) aponta para Girard Desargues (1591-1661), arquiteto e engenheiro militar de Lyons, e seu famoso *Brouillon Project d'une atteinte aux événements des rencontres du Cone avec un plan* (“Esboço tosco da tentativa de tratar o resultado de um encontro entre um cone e um plano”) publicado em 1639, como o trabalho mais fascinante de geometria pura, escrita no século XVII. A Geometria Projetiva, como ramo da Matemática, determinava então o seu início com a publicação de

cinquenta exemplares do *Brouillon Project*. Segundo Boyer (1996, p.247), esse trabalho teve para a época, tanto de originalidade, simplicidade e beleza como de mau gosto quanto ao título e à

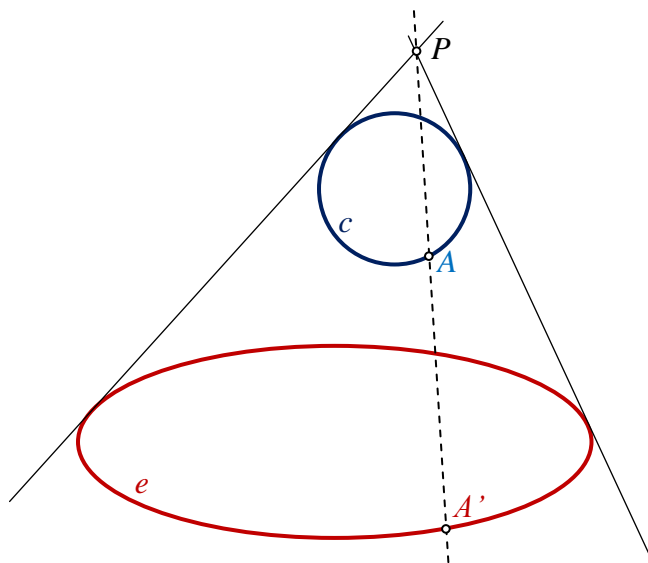


Fig.3.2 - Projeção de uma circunferência numa elipse

linguagem empregue. É interessante ler a reação de Descartes ao trabalho de Desargues, (Veloso,p.299): «A abertura que tenho observado no vosso temperamento e as minhas obrigações convosco, convidam-me a escrever-vos livremente sobre o que posso conjecturar a propósito do Tratado das Secções Cónicas, do qual o Reverendo Padre Mersenne me enviou o Brouillon Projet. Vós podeis ter duas intenções, ambas muito boas e muito louváveis, mas que não requerem a mesma linha de ação. Uma é escrever para os já sabedores, e instruí-los sobre algumas propriedades novas das cónicas, com as quais eles ainda não tiveram contacto; a outra é escrever para pessoas que estão interessadas mas não estão instruídas, e tornar este assunto, que até agora foi compreendido por poucas pessoas, mas que é no entanto muito útil para a Perspetiva, Arquitetura, etc. acessível para as pessoas comuns e facilmente compreensível por alguém que o estude a partir do vosso livro. Se vós tendes a primeira destas intenções, não me parece a mim que haja necessidade de usar novos termos: porque os instruídos, já habituados aos termos usados por Apolónio, não os trocarão facilmente por outros, mesmo melhores, e por isso os vossos termos apenas terão por consequência tornar as vossas demonstrações mais difíceis para eles e desencorajá-los de as ler. Se tendes a segunda intenção, os vossos termos, sendo franceses, e mostrando imaginação e elegância na sua invenção, serão certamente melhor recebidos do que os dos antigos por quem não tem ideias preconcebidas; e podem mesmo servir para atrair pessoas a ler o vosso trabalho, como leem trabalhos em Heráldica, Caça, Arquitetura, etc. sem ter qualquer desejo de se tornarem caçadores ou arquitetos mas apenas para falarem sobre isso corretamente. Mas, se é esta a vossa intenção, podeis-vos preparar para escrever um volumoso livro, com explicações completas sobre tudo e suficientemente claras de tal modo que estes gentlemen, que não são capazes de estudar um livro sem bocejar e não sabem exercer a sua imaginação para compreender uma demonstração em Geometria, nem para voltar a página para ver as letras numa figura, não encontrem o que quer que

seja no vosso discurso que lhes pareça menos fácil de compreender que a descrição de um palácio numa novela. E, para este fim, parece-me que, para tornar as vossas demonstrações menos pesadas, não estaria fora de questão empregar a terminologia e o estilo do cálculo e da Aritmética, como fiz na minha Geometria; porque existem muito mais pessoas que sabem o que é a multiplicação do que acerca de proporções compostas, etc...».

A essência da simplicidade da obra de Desargues, como refere Boyer, deriva de dois fatores: a noção de perspectiva na arte da Renascença e o princípio de continuidade⁵ de Kepler. Durante o Renascimento introduziu-se a percepção de profundidade em pinturas e nos desenhos (Fig.3.3), como resposta à procura de maior realismo nas obras - a “imagem” capturada pela visão humana, ou seja as formas “como elas são vistas”. O mesmo se pode dizer quando olhamos uma extensão de vias de comboio (Fig.3.4). O que vemos é que os carris parecem encontrar-se num ponto do horizonte e as medidas são distorcidas a tal ponto que retas paralelas podem se encontrar num ponto finito, conhecido como ponto de fuga. Segundo Veloso(1998, p.292) foi Leon Battista Alberti (1404-1472) quem, em 1435, escreveu o primeiro tratado, *Della Pittura*, onde aparecem as regras da perspectiva com um ponto de fuga. Alberti formula a seguinte questão: quais propriedades são preservadas entre dois distintos desenhos “perspetivos” de um mesmo objeto?

O astrónomo Johannes Kepler (1571 – 1630) foi quem deu, pela primeira vez e de modo explícito, o conceito de ponto no infinito para designar o ponto de interseção de um feixe de retas paralelas

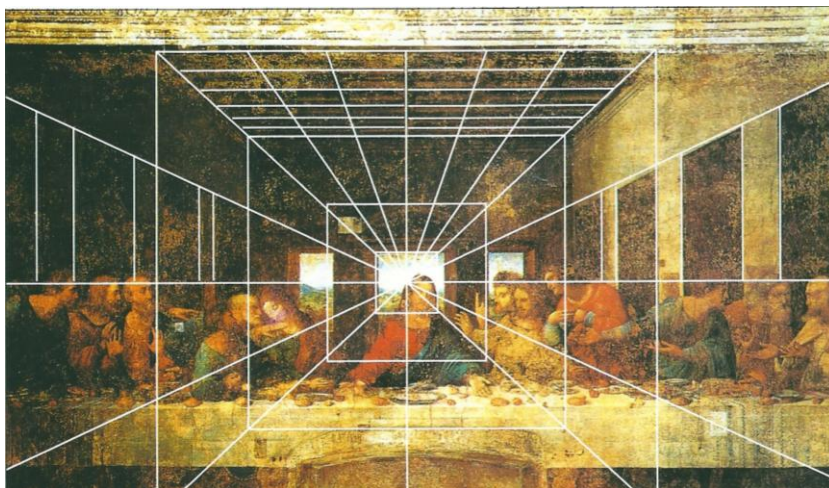


Fig.3.3 -Detalhe da perspectiva utilizada por Leonardo da Vinci no quadro “A Última Ceia”

⁵ Segundo Boyer(1974, p.222) Kepler desenvolveu para as cônicas em 1604 (em seu *Ad Vitellionem paralipomena*, isto é, “Introdução à ótica de Vitello”) o que chamamos de princípio de continuidade. Da secção cônica que consiste de duas retas que se cortam, em que os dois focos coincidem no ponto de interseção, passamos gradualmente por uma infinidade de hipérboles à medida que um foco se afasta cada vez mais do outro. Quando um foco está infinitamente longe, já não temos a hipérbole de dois ramos mas parábola. Se o foco móvel passa além do infinito e regressa pelo outro lado passamos por uma infinidade de elipses até que, quando os focos coincidem novamente chegamos ao círculo. O princípio de continuidade de Kepler é soberbamente reproduzido no filme *Conic Sections–Darkness* que se resume na sequência de imagens da Fig.3.5.

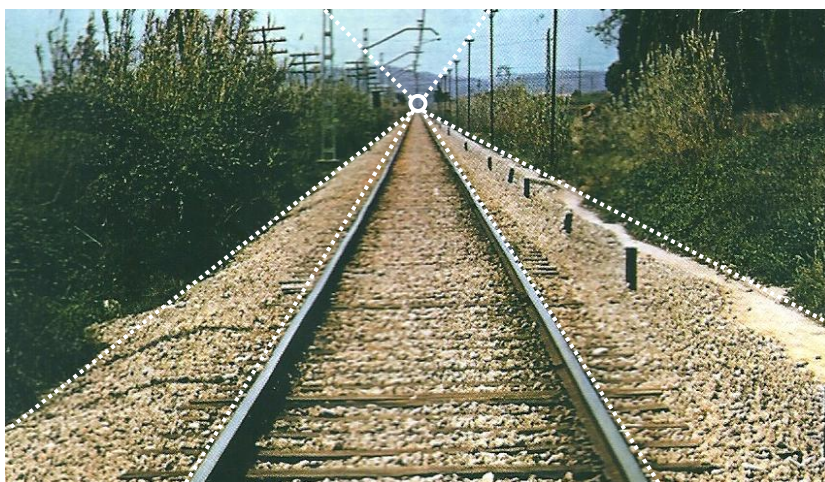


Fig.3.4 - Imagem do ponto no infinito nos carris dos comboios

(raios de luz). Segundo Sá(1993, p.16) foi a investigar as propriedades óticas dos espelhos que Kepler aborda as cónicas para descobrir pontos muito especiais nos eixos de cada uma, aos quais atribui o nome de focos. Para Kepler, as três cónicas possuem exatamente dois focos nos respetivos eixos sendo a parábola o caso em que o segundo foco se encontra a uma distância infinita (razão pela qual Kepler lhe dá o nome de foco cego) Na Fig.3.5 observamos que o contorno da sombra projetada de um feixe de luz incidente sobre um “círculo” (bola) parece ser o próprio círculo, uma elipse, uma parábola ou uma hipérbole, conforme o posicionamento do foco de luz relativamente ao “círculo” (bola) e o plano sobre o qual se projeta a sombra. As formas e tamanho mudam conforme o plano de incidência que corta o cone de raios de luz, mas certas propriedades permanecem as mesmas em todas essas mudanças.



Fig.3.5 - Projeções de um círculo sobre um plano

Foram essas propriedades que Desargues estudou e para tal, em concordância com Kepler, teve de admitir que retas paralelas se encontram num ponto, ponto esse situado no infinito.

No desenho da Fig.3.6 as retas r , s e t são paralelas entre si, sucedendo o mesmo em relação às retas w , u e v . Intuitivamente concluímos que os pontos P e Q a existirem seriam pontos do infinito, isto é, o ponto P seria um ponto no infinito das retas r , s e t e Q um ponto no infinito das retas w , u e v .

Segundo Veloso(1998, p.301) transfere-se daí para o âmbito da Matemática o conceito de ponto do infinito da reta, reta do infinito do plano e de plano do infinito do espaço. É nesta base que se fundará

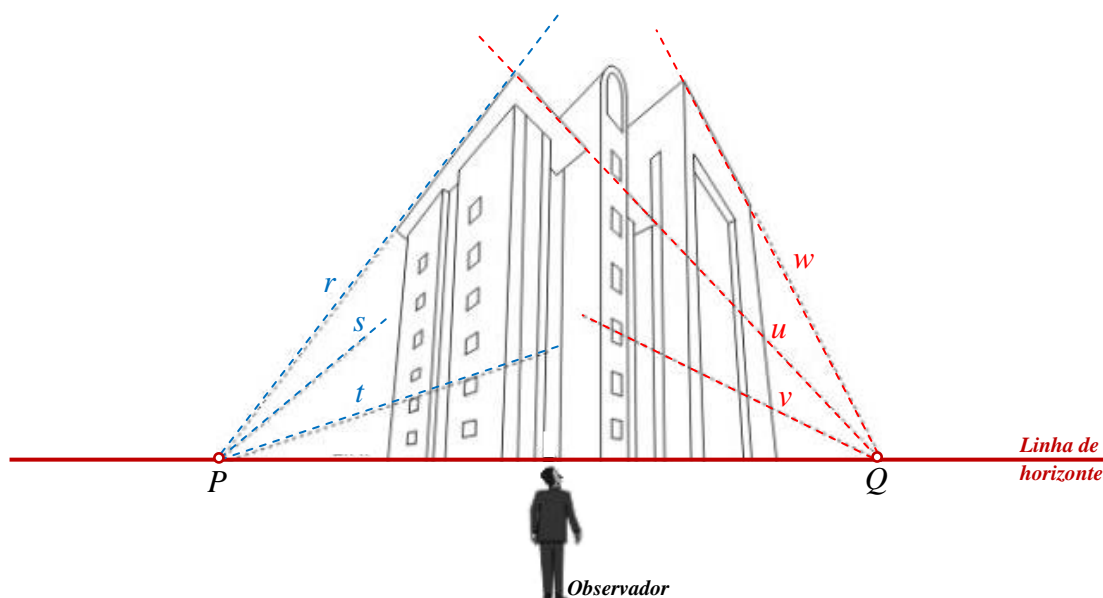


Fig.3.6 - Os pontos de fuga são pontos no infinito

a Geometria Projetiva, uma geometria que permite enunciar propriedades geométricas, sem os habituais constrangimentos restritivos que o paralelismo impõe. A reta “acrescentada”, o plano “acrescentado” e o espaço “acrescentado” passarão a ser chamados reta projetiva, plano projetivo e espaço projetivo, respetivamente.

3.2. O Contributo de Desargues na simplificação das teorias de Apolónio acerca das cónicas

No seu controverso mas célebre trabalho *Brouillon Project*, Desargues, segundo Hogendijk (1991, p.1), introduz uma radical inovação respeitante às cónicas de Apolónio ao apresentar dois novos conceitos, nomeadamente ponto no infinito e os equivalentes ao polo e polar, relativos a uma cónica (termos modernos introduzidos por Poncelet, seu seguidor no séc. XIX). Ao polo designava pela palavra *butt* (topo/alvo) e à polar pela palavra *transversal*. Como veremos foi graças aos famosos pontos e linhas no infinito que Desargues conseguiu simplificar as teorias de Apolónio sobre diâmetros e ordenadas que na secção 2 do capítulo 1 foram determinantes na definição das cónicas. O interesse especial de Desargues era estudar aquilo que a Geometria Projetiva moderna chama de invariantes projetivos.

A Fig.3.7 (Hogendijk,1991,p.5) tipifica uma secção cónica preconizada por Apolónio. À luz dos modernos conceitos de projeção central podemos olhar para essa figura e descreve-la de forma distinta da de Apolónio:

Para qualquer ponto X no plano τ da base do cone, chamemos X' a intersecção da reta AX com o plano τ' (gerador da cónica). O processo de transformação que envia o ponto X no ponto X' chama-se projeção central de centro O , e ao ponto X' chamaremos projeção de X , tendo como centro de projeção o vértice A do cone. O diâmetro d da secção cónica c' é a projeção do diâmetro

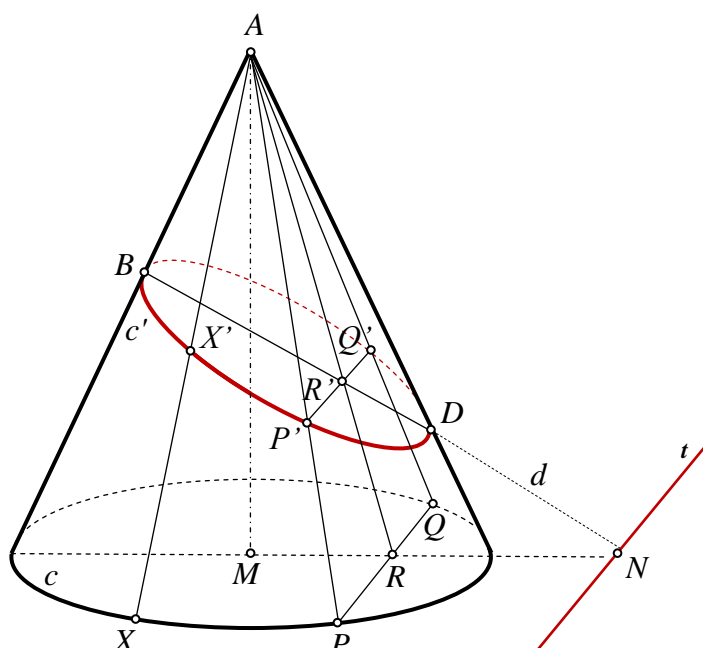


Fig.3.7 - A secção cônica de Apolônio vista por Desargues

MN do círculo c . Contudo, essa correspondência projetiva não se aplica aos centros, isto é o centro O da cônica não é, em geral, projeção do centro M do círculo pelo que não podemos garantir correspondência projetiva relativamente aos outros diâmetros, isto é, não é possível obter para estes, diâmetros de c' a partir dos de c do mesmo modo que o diâmetro d . Desargues procura ultrapassar tais constrangimentos seguindo um rumo diferente. Começa pela reapreciação dos seguintes resultados, constantes nos principais teoremas de Apolônio:

- Toda a linha reta que contém o centro da elipse é um diâmetro da elipse;
- Toda a linha paralela ao diâmetro principal da parábola é diâmetro da parábola;
- Toda a linha, com exceção das assintotas, que contém o centro da hipérbole é um diâmetro de cada um dos ramos da hipérbole.

Introduz juntamente os pontos e linhas no infinito cuja existência assumiu sem apresentar nenhuma justificação mas que deu a entender serem as seguintes as principais propriedades:

- Retas paralelas têm o mesmo ponto no infinito;
- O conjunto de todos os pontos do infinito de um plano forma uma reta, a reta do infinito do plano (o plano “acrescentado”);
- Dois pontos do plano “acrescentado” definem sempre uma reta;
- Em particular, dois pontos do infinito de um plano definem a reta do infinito do plano;
- “Dar” um ponto do infinito do plano é dar uma direção no plano;
- No plano “acrescentado” duas retas distintas (concorrentes ou paralelas) definem um ponto;
- Dois planos paralelos têm a mesma reta do infinito;
- A interseção de dois planos é sempre uma reta (em particular pode ser a reta do infinito se são paralelos);
- Três pontos não colineares definem sempre um plano:

- se um deles é do infinito, é o plano passando pelos outros dois e paralelo a essa direção;
- se os três são do infinito e não são colineares (ou seja, não pertencem os três à reta do infinito de um plano) definem o plano do infinito do espaço;
- O plano do infinito contém todas as retas e pontos do infinito.

Os dois teoremas que se seguem são de Apolônio e terão sido a base de inspiração para Desargues (consta, porém, que Desargues nunca os referiu).

Teorema 3.1 Sejam PA e PB duas tangentes a uma secção cônica nos pontos A e B (Fig.3.8). Se a linha que contém P interseca AB no ponto Q e à cônica nos pontos X e Y , então $\frac{PX}{PY} = \frac{QX}{QY}$.

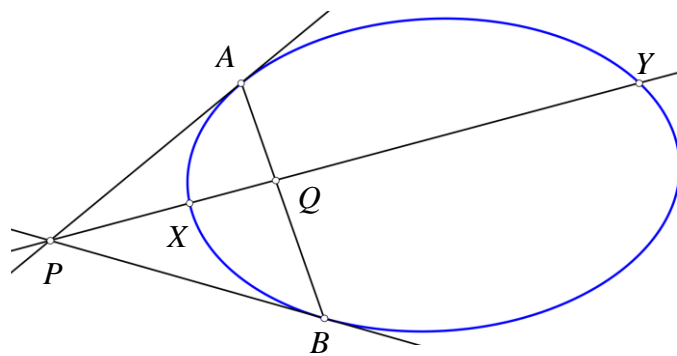


Fig.3.8 - Imagem da involução de quatro pontos

Teorema 3.2 Sejam CA e CB duas tangentes a uma secção cônica nos pontos A e B , P o ponto médio do segmento de reta AB e r a reta que contém C e é paralela a AB (Fig.3.9). Se a linha reta que contém P interseca a reta r no ponto Q e à cônica nos pontos X e Y , então $\frac{PX}{PY} = \frac{QX}{QY}$.

Consideremos conjuntamente a Fig.3.10 representando também uma secção cônica, o respetivo diâmetro d e a série de cordas paralelas XY , XY' etc., bisetados pelo diâmetro nos pontos Q , Q' etc., com $QX = QY$, $Q'X' = Q'Y'$ etc. Em relação à Fig.3.10 Desargues considera que todas as ordenadas XQ , XQ' passam por um ponto fixo P situado no infinito e procura estabelecer uma conexão entre todas as linhas retas $PXQY$ e $YPXQ$ através do ponto fixo P . Para tal Desargues introduz o conceito de involução de quatro pontos localizados numa linha reta.

Definição 3.1 (Involução) Dois pares de pontos (X, Y) e (P, Q) numa linha reta representam quatro pontos em involução se P , Q , X e Y são quatro pontos comuns distintos e $\frac{PX}{PY} = \frac{QX}{QY}$ ou se Q , X e Y são três pontos comuns distintos, P um ponto no infinito e $QX = QY$.

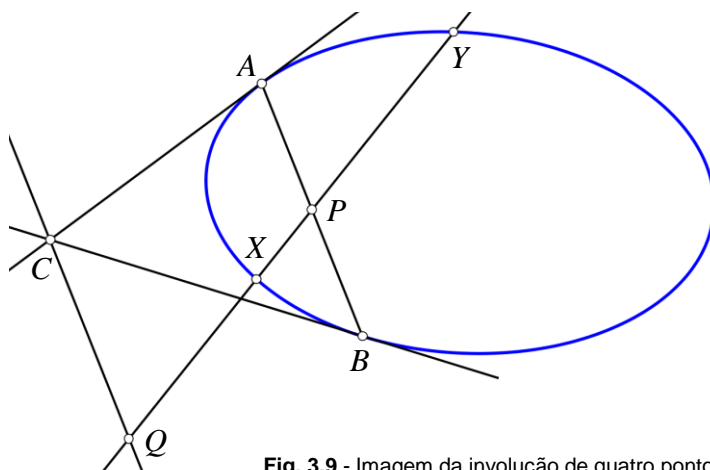


Fig. 3.9 - Imagem da involução de quatro pontos (2)

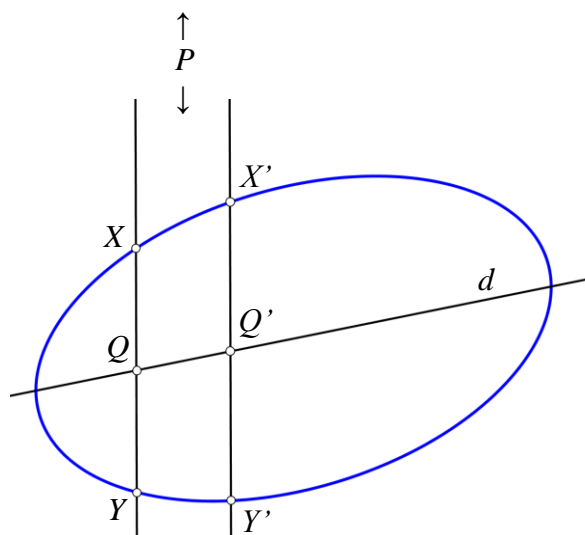


Fig. 3.10 - Imagem da involução de quatro pontos (3)

Para Apolônio as situações descritas na Fig.3.8 e na Fig.3.9 são distintas da Fig.3.10. Desargues, porém, vê analogia nas três figuras exatamente por nos três casos P , Q , X e Y representarem quatro pontos em involução. É deste modo que estabelece o primeiro conceito de polaridade.

Definição 3.2 (Polaridade segundo Desargues) Consideremos uma secção cônica c , um ponto fixo P , uma linha reta fixa r e linhas retas arbitrariamente traçadas a partir de P intersecando a cônica em pontos X e Y e a reta r no ponto Q (Fig.3.11). Se para cada uma das linhas arbitrariamente traçadas os pares de pontos (X, Y) e (P, Q) forem quatro pontos em involução, o ponto P representa o polo (*but*), a reta r representa a correspondente polar (*transversal*).

Reapreciando as três figuras anteriores deduzimos o seguinte:

Na Fig.3.8 o ponto P representa o polo da reta AB e esta a correspondente polar;

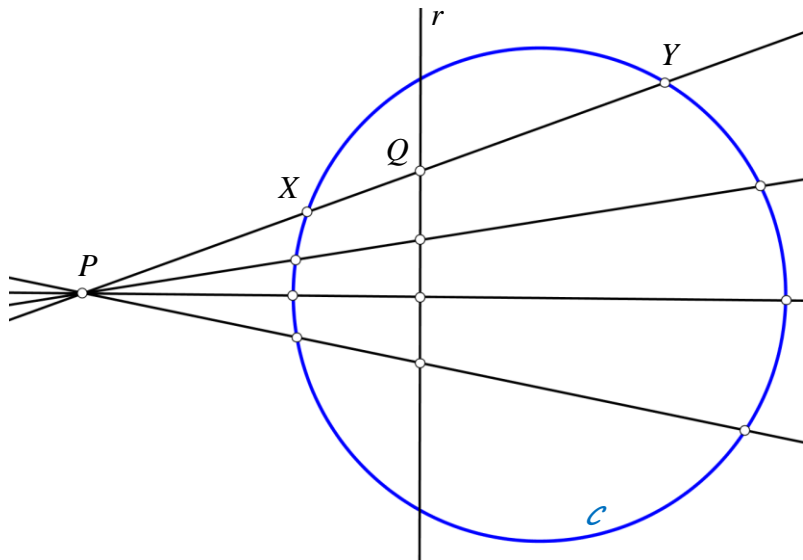


Fig. 3.11 - Polaridade segundo Desargues

Na Fig.3.9 o ponto P é o polo da polar QC ;

Na Fig.3.10 o ponto P (no infinito) é polo da polar d .

Hogendijk (1991, p.16) refere que Desargues quis estabelecer os seus teoremas independentemente das teorias de Apolônio, tanto que procurou fazer derivar o teorema sobre os diâmetros a partir dos próprios que enunciou sobre a polaridade. Veremos mais adiante como o fez. Para já é oportuno regressar ao passado, à Matemática grega, aos resultados respeitantes aos Elementos de Euclides e à Coleção de Matemática de Pappus (com especial destaque para a proposição 129) que constituíram fontes importantes para Desargues na formulação das suas teorias. Segundo Sá (1993, p.26) muito antes de Desargues já eram conhecidos resultados que hoje consideramos como autênticos “Teoremas da Geometria Projetiva”, o primeiro dos quais remontam a Pappus de Alexandria já referido na secção 1.1 do capítulo 1. Falaremos exclusivamente da famosa Proposição 129 de Pappus.

Proposição 3.1 (Uma adaptação da Proposição 129 do sétimo livro da Coleção de Pappus à luz da Geometria Projetiva moderna) Sejam r e r' duas retas concorrentes num ponto A , e P um ponto do plano por elas definidas mas não pertencente nem a r nem a r' (Fig.3.12). Consideremos em r três outros pontos B , C e D (distintos de A e distintos entre si) e a projeção entre as retas r e r' a partir do centro de projeção P . Se os pontos A' , B' , C' , e D' de r' são imagem por essa projeção de A , B , C , e D respetivamente, então relativamente aos quartetos ordenados de ponto (A, B, C, D) e (A', B', C', D') subsiste a igualdade

$$\frac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC} = \frac{A'C' \cdot B'D'}{A'D' \cdot B'C'}.$$

(Note-se que $A \equiv A'$ pelo que o ponto A fica invariante na projeção)

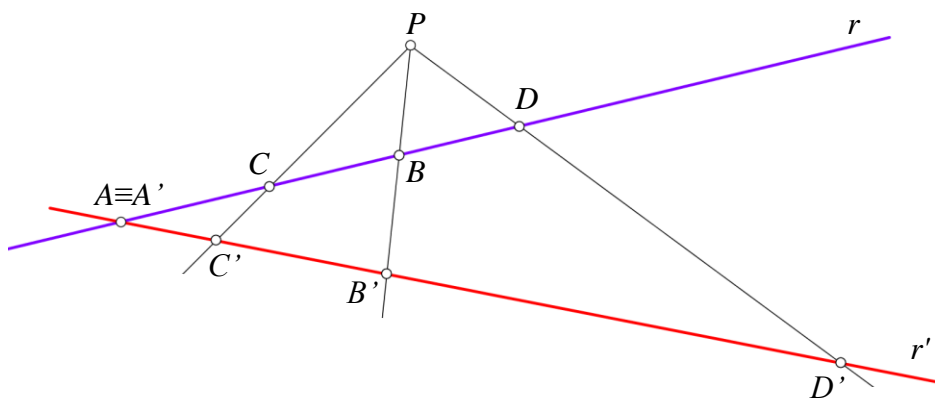


Fig. 3.12 - Proposição 129 da coleção de Pappus

Demonstração:

Traçamos por A uma reta paralela à reta PB intersectando as retas PC e PD nos pontos L e K, respectivamente (Fig.3.13).

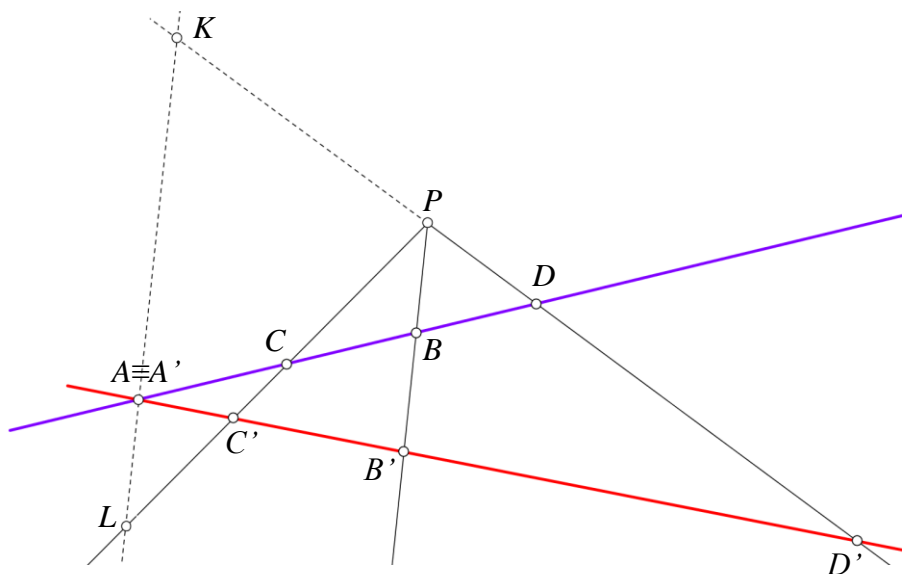


Fig.3.13 - Demonstração da Proposição 129 da coleção de Pappus

Pelo paralelismo das retas PB e KL temos que $\frac{AC}{BC} = \frac{AL}{BP}$ e $\frac{BD}{AD} = \frac{BP}{AK}$.

Portanto, $\frac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{BD}{AD} = \frac{AL}{BP} \cdot \frac{BP}{AK} = \frac{AL}{AK}$.

Analogamente, $\frac{A'C'}{B'C'} = \frac{AL}{B'P}$ e $\frac{B'D'}{A'D'} = \frac{B'P}{AK}$, donde $\frac{A'C' \cdot B'D'}{A'D' \cdot B'C'} = \frac{A'C'}{B'C'} \cdot \frac{B'D'}{A'D'} = \frac{AL}{B'P} \cdot \frac{B'P}{AK} = \frac{AL}{AK}$.

Consequentemente, $\frac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC} = \frac{A'C' \cdot B'D'}{A'D' \cdot B'C'}$ o que conclui a demonstração. ■

Não nos esqueçamos que Desargues pretendia nos seus teoremas enunciar resultados que traduzissem invariância projetiva. No caso que acabamos de analisar o ponto A é interseção das retas r e r' , portanto coincide com a sua imagem A' . Tal facto leva-nos a questionar se o número $\frac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC}$ associado ao quarteto (A, B, C, D) de pontos de r é um invariante projetivo. Vamos por isso analisar o caso em que A não coincide com A' . Sejam a, b, c, d quatro retas concorrentes num ponto P e sejam A, B, C, D e A', B', C', D' os pontos em duas retas transversais r e r' , respetivamente (Fig.3.14).

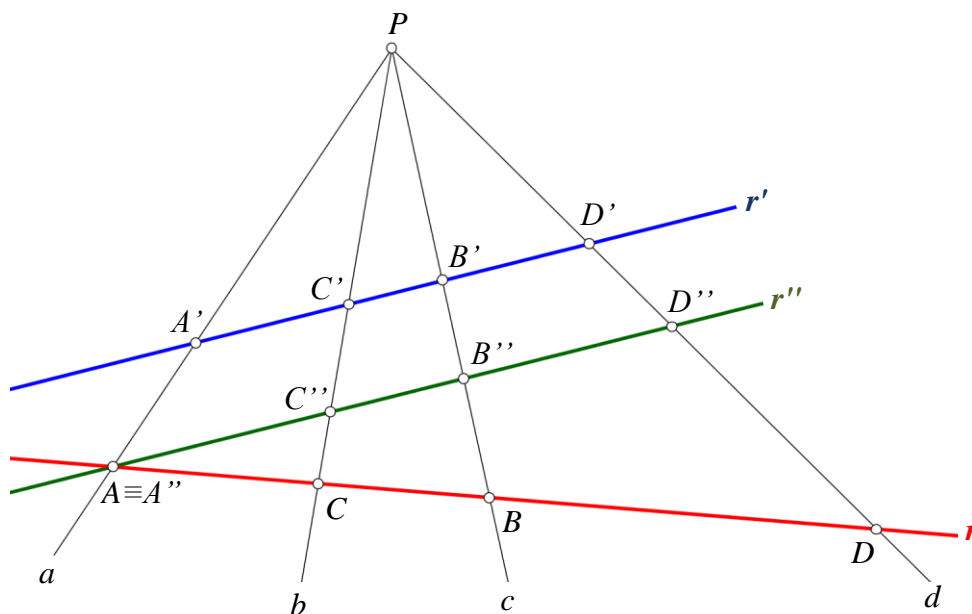


Fig.3.14 - Demonstração da Proposição 129 da coleção de Pappus (2)

Traçando por A uma reta r'' paralela a r e intersectando as retas b, c, d nos pontos B'', C'', D'' , respetivamente garantimos que $\frac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC} = \frac{A''C'' \cdot B''D''}{A''D'' \cdot B''C''}$ (pela proposição 129 de Pappus).

Pelo paralelismo de r e r' garantimos facilmente que $\frac{A''C'' \cdot B''D''}{A''D'' \cdot B''C''} = \frac{A'C' \cdot B'D'}{A'D' \cdot B'C'}$.

Portanto, $\frac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC} = \frac{A'C' \cdot B'D'}{A'D' \cdot B'C'}$ ■

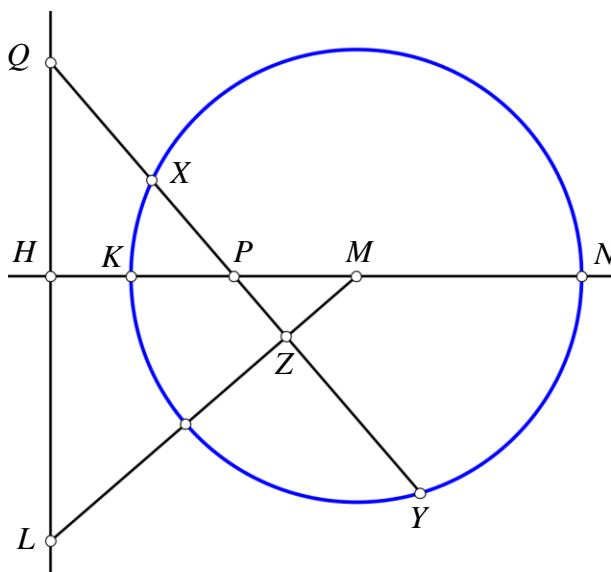
Cerca de 1500 anos depois de Pappus, a razão $\frac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC}$ seria retomada pelo alemão Jacob Steiner (1796-1863) e pelo francês Michel Chasles (1793-1880). Estes géometras considerariam a referida razão como ponto de partida para as suas teorias projetivas das cónicas.

Teorema 3.3 (Sobre as polaridades de Desargues)

- (a) Para toda e qualquer secção cônica todo o ponto do plano (incluindo pontos no infinito) é polo de uma reta assim como toda a linha reta é polar de um ponto;
- (b) Se um ponto P pertence a uma linha reta r o polo de r pertence ao polar de P .

Demonstração

(a) Seja M o centro do círculo na Fig.3.15 e escolhamos o ponto P distinto de M (interior ou exterior ao círculo). Determinemos o ponto H sobre MP de modo que $MP \cdot MH = r^2$ sendo r o raio do círculo. Tracemos por H a perpendicular a HM . Se MP interseotar o círculo em K e N , podemos concluir que $\frac{PK}{PN} = \frac{HK}{HN}$ a partir da relação $MP \cdot MH = r^2 = MK^2$. Desenhemos a linha que contém P e interseota a perpendicular a MP no ponto Q e o círculo em X e Y . Com base em resultados oriundos da coleção de Pappus de Alexandria (que Desargues muito apreciava), um ponto P nas condições da Fig.3.15 satisfaz a condição $\frac{PX}{PY} = \frac{QX}{QY}$. Assim, P é polo da linha HQ .

**Fig.3.15** - Demonstração de polaridade

Por raciocínios análogos, refere Hogendijk (1991, p.17), Desargues provou ainda que qualquer linha reta comum que não passe pelo centro e não seja tangente ao círculo é polar de um ponto. Qualquer diâmetro do círculo bissecta as cordas que lhe são perpendiculares pelo que qualquer diâmetro é polar de um ponto no infinito dessas cordas. O centro do círculo é polo de uma linha no infinito. Qualquer ponto P do círculo pode ser definido como polo da tangente ao círculo no ponto P . Fica assim provado a parte (a) do teorema3.3.

(b) Suponhamos que o ponto P pertence à linha q (definida por PQ). Desenhemos a perpendicular MZ a q prolongando-a até interseção a polar de P no ponto L . Os triângulos MPZ e MLH são semelhantes, pelo que $\frac{MP}{MZ} = \frac{ML}{MH}$, donde $MZ \cdot ML = MP \cdot MH = r^2$. Portanto L é polo de q ■

Teorema 3.4 (Sobre os diâmetros de Apolónio) Para toda e qualquer secção cónica existe um ponto (o centro) tal que toda a reta que por ela passa é diâmetro da cónica.

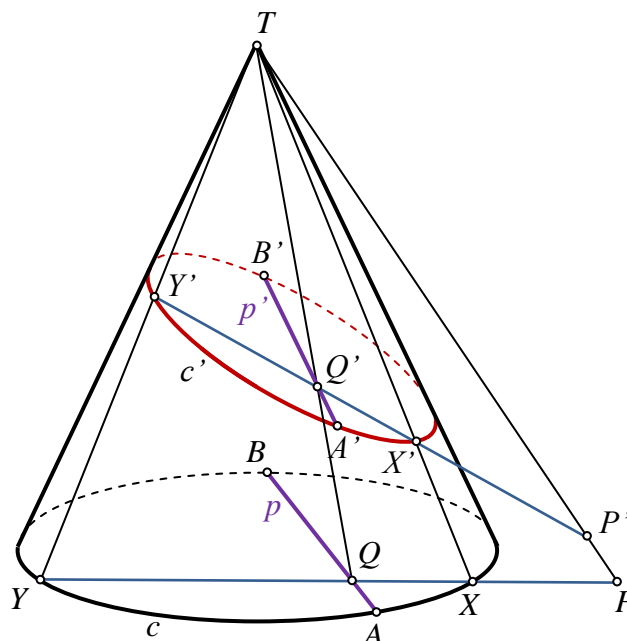
Demonstração do teorema 3.4 a partir do teorema 3.3:

(Recordemos que Desargues fê-lo assim para vincar a sua independência das teorias de Apolónio)
Consideremos o centro M da cónica definido como polo de uma reta no infinito [Teorema3.3(a)]. Seja d uma linha reta que contém o centro M . A linha d é polar de um polo D [Teorema3.3(a)] e D pertence a uma reta no infinito [Teorema3.3(b)]. Logo d é diâmetro de Apolónio, como consequência da definição de polaridade (Definição3.2). As correspondentes ordenadas são as paralelas concorrentes no infinito ponto D ■

Hogendijk (1991, p.18) mostra finalmente que os conceitos de polo e polar são, em termos modernos, os invariantes projetivos que Desargues procurava. Para tal consideremos na Fig.3.16 os planos τ e τ' que interseção o cone de vértice T no círculo c e na secção cónica c' respetivamente. Para qualquer ponto P do plano τ chamemos projeção de P à interseção P' da reta TP com o plano τ' . Nestas condições a projeção de uma reta p de τ é a linha reta p' de τ' que é a interseção do plano τ com plano que contém T e p . A projeção do círculo c é certamente a cónica c' . Suponhamos agora que P é polo da reta p relativamente a c . Seja $PXQY$ a linha reta que interseção c em X e Y e a linha p no ponto Q . A projeção de $PXQY$ é a linha reta $P'X'Q'Y'$ que por sua vez interseção c' em X' e Y' e p' no ponto Q' . Como P é o polo de p , os pares (P,Q) e (X,Y) são quatro pontos em involução. Teremos então, como provará Desargues, que os pares (P',Q') e (X',Y') são também quatro pontos em involução. Por conseguinte a projeção P' é também polo da linha p' relativamente a c' . O teorema3.3 que foi provado para o caso do círculo c torna-se válida para a secção cónica c' .

Portanto, aquilo que era aparentemente difícil de conseguir, a generalização do conceito de diâmetro na passagem do círculo para a cónica foi superado por Desargues ao substituir o diâmetro de Apolónio (que não é um conceito projetivamente invariante) por algo mais geral e que é projetivamente invariante, a polaridade.

Outro aspeto importante do contributo de Desargues foi a sua preocupação em unificar alguns conceitos em torno da noção de ponto no infinito. O conceito de feixes de retas (concorrentes e paralelos), o conceito de projeção (central e paralela) e o conceito de cone e cilindro na imagem do “rolo” (superfície cónica e cilíndrica).



parecido com um traço reto e infinito no plano. O mesmo se poderá dizer do plano, também um termo primitivo: intuitivamente imaginamos o plano como um universo bidimensional com forma de placa muito fina e infinita, totalmente preenchido com pontos e retas. As três entidades acabadas de referir, ponto, reta e plano carecem de um termo formal que institua as suas relações. Designaremos esse termo por incidência. Acresce-se ainda que usaremos letras maiúsculas para pontos e letras minúsculas para retas.

Diz-se que um ponto P é interseção de duas retas r e s escreve-se na forma $P = r \cdot s$;

Diz-se que uma reta r é formada pelos pontos A e B escreve-se na forma $AB = r$;

Diz-se que um plano é definido por um ponto P e por uma reta r e escreve-se na forma plano Pr ;

Diz-se que um plano é definido por três pontos não colineares A , B e C e escreve-se na forma plano ABC .

Definição 3.1 Seja r uma reta qualquer e seja P um ponto não incidente em r . Diz-se que um ponto X está no plano Pr se a reta PX é a mesma reta que PR para algum ponto R na reta r . Diz-se que uma reta está no plano Pr se é determinada por dois pontos deste plano.

Consideremos um par de pontos formado pelo ponto A e pelo ponto B e um par de linhas retas formado pela reta r e pela reta s (Fig.3.17).

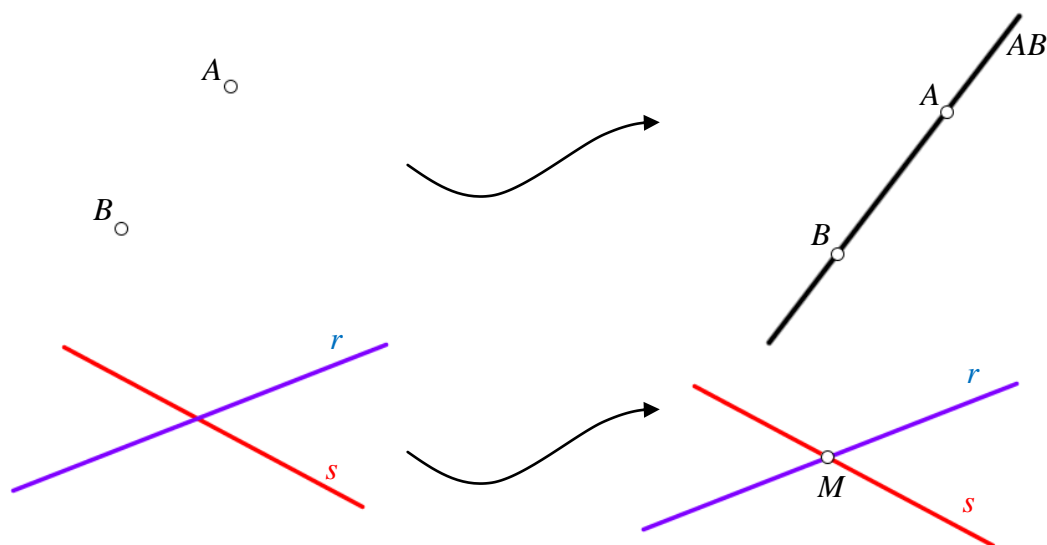


Fig.3.17- União de pontos e interseção de linhas

Ao par de pontos A e B corresponde uma única linha reta m que une os pontos A e B , e ao par de linhas retas r e s corresponde um único ponto M que resulta da interseção das linhas retas r e s . Temos assim que

$m = AB$ representa a linha reta que une o ponto A ao ponto B ;

$M = r \cdot s$ representa a interseção das linhas retas r e s ;

Adotaremos os conceitos de colinearidade de pontos e concorrência de retas do seguinte modo:

- Os pontos dizem-se colineares quando são incidentes numa única reta. Na Fig.3.18 (a) os pontos A , B e C são colineares na reta r .
- As retas dizem-se concorrentes quando existe um ponto incidente a todas elas. Na Fig.3.18 (b) as retas l , m e n são concorrentes no ponto P .

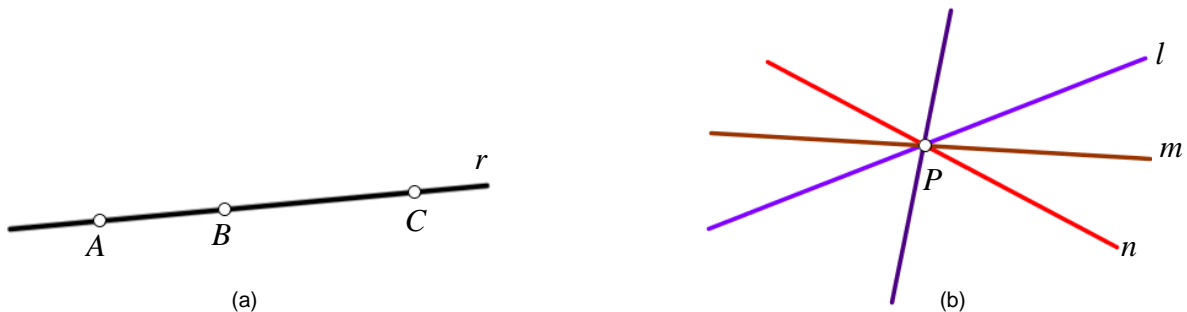


Fig.3.18 - Pontos colineares e retas concorrentes

Na Fig.3.19 dispomos alguns elementos que vão construir a Geometria Projetiva:

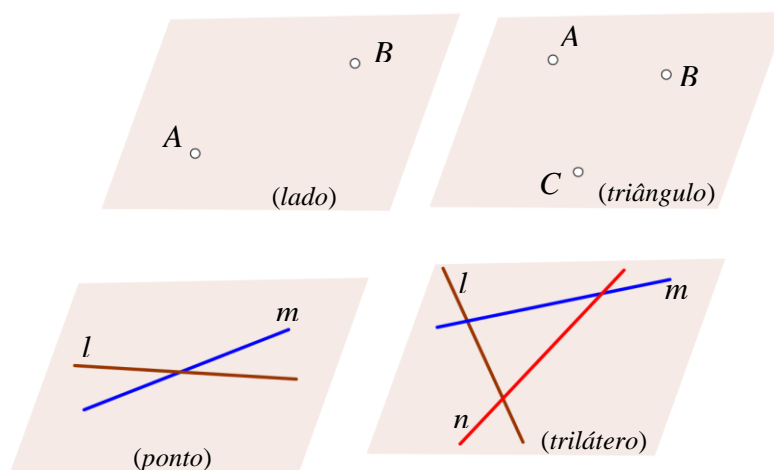


Fig.3.19 - Lado, triângulo, ponto e trilátero

- Dois pontos A e B definem um lado;
- Três pontos A , B e C (não colineares) definem um triângulo de vértices A , B e C e lados AB , BC e AC ;
- Duas retas l e m definem um ponto (vértice) dado por $l \cdot m$;
- Três retas l , m e n definem um trilátero de lados l , m e n e vértices $l \cdot m$, $l \cdot n$ e $m \cdot n$.

Numa primeira análise apercebemo-nos de uma interessante relação de dualidade entre a caracterização do ponto e a caracterização da reta, que se pode traduzir no seguinte enunciado:

- Uma reta resulta da união de dois pontos assim como um ponto resulta da interseção de duas retas.

Para figuras com mais de três vértices (ou lados) a situação já não é tão simples. Seguem então as primeiras definições de caráter puramente projetivo que emparelharemos em colunas (conhecidas por colunas de Poncelet para exprimir dualidades).

Definição 3.2 Se quatro pontos A, B, C e D , dois a dois, determinam seis retas, então eles são ditos vértices de um *quadrângulo completo*, onde estas seis retas são chamadas de lados. Se o ponto de intersecção entre dois lados não for um vértice, então chamamos esses lados de lados opostos e o ponto de intersecção de ponto diagonal.

Definição 3.3 Se quatro retas a, b, c e d se interceptam, duas a duas, em seis pontos, então elas são ditas lados de um *quadrilátero completo*, onde estes seis pontos são chamados de vértices. Se a reta determinada por dois vértices não for um lado, então chamamos esses vértices de vértices opostos e a reta de reta diagonal.

Questão óbvia (de principiante): que fazer com os pontos (vértices) de um quadrângulo e as linhas (lados) de um quadrilátero?

Resposta óbvia (para principiante): unem-se os pontos (vértices) e intersectam-se as linhas (lados).

Exemplificaremos a seguir a execução das duas operações básicas em Geometria Projetiva, unir ponto e intersectar linhas, ao mesmo tempo que investigaremos os resultados consequentes dessas operações.

Dados quatro pontos A, B, C e D (Fig.3.20), a partir das operações unir ponto e intersectar linhas

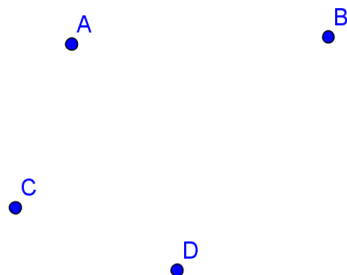


Fig.3.20 - Vértices de um quadrângulo

obtivemos o esquema da Fig.3.21.

Na primeira união de pontos (A, B, C e D) obtivemos seis linhas retas, AB, BC, CD, AD, AC e BD ;

Na primeira intersecção de retas obtivemos os pontos $F=(AB) \cdot (CD)$, $G=(AD) \cdot (BC)$ e $E=(AC) \cdot (BD)$;

Na segunda união de pontos obtivemos as retas FE e GE ;

Na segunda intersecção de retas obtivemos os pontos $K=(FE) \cdot (AD)$, $L=(GE) \cdot (CD)$, $M=(FE) \cdot (BC)$ e $N=(GE) \cdot (AB)$;

Na terceira e última união de pontos obtivemos as retas NK, KL, LM e MN ;

Uma observação atenta da Fig.3.21 permite-nos formular as seguintes conclusões:

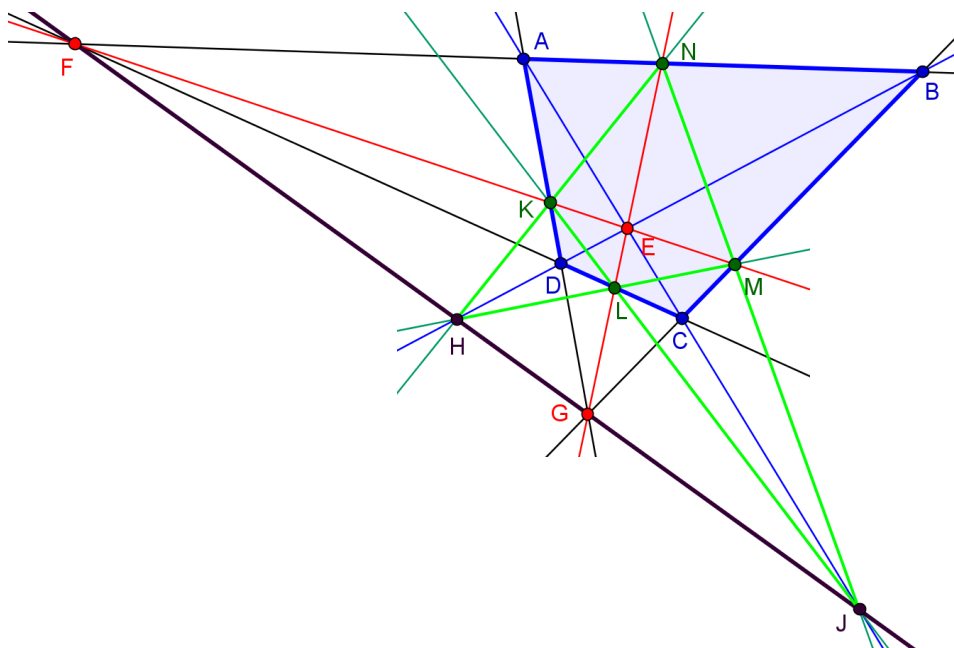


Fig.3.21 - União de pontos e interseção de linhas a partir dos vértices de um quadrângulo

- Da união dois a dois dos quatro pontos A, B, C e D obtivemos seis retas logo, pela definição 3.2, confirma-se que $ABCD$ é um quadrângulo sendo os pontos A, B, C e D seus vértices, as retas AB, BC, CD, AD, AC e BD os lados, e F, G e E os pontos diagonais;
- Os quatro vértices do quadrângulo geraram quatro novas retas NK, KL, LM e MN , os quatro lados do quadrilátero dual do quadrângulo $ABCD$.
- O quarteto de pontos F, G, H e J formam aquilo que em Geometria Projetiva designamos por conjunto harmónico de pontos.

Consideremos agora a situação dual. Dadas quatro retas a, b, c e d (Fig.3.22), a partir das operações unir ponto e interseção de retas obtivemos o esquema da Fig.3.23.

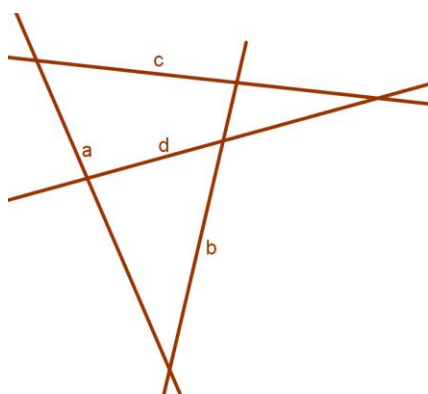


Fig.3.22 - Lados de um quadrilátero

Na primeira interseção de retas obtivemos os pontos $A=a \cdot c, B=a \cdot d, C=c \cdot d, D=b \cdot c, E=b \cdot d$ e $F=a \cdot b$;
Na primeira união de pontos obtivemos as retas BD, AE e FC ;

Na segunda interseção de retas obtivemos os pontos $G=(AE) \cdot (FC)$, $H=(AE) \cdot (BD)$ e $I=(BD) \cdot (FC)$;

Na segunda união de pontos obtivemos as retas AI, EI, CH, FH, BG , e DG ;

Na terceira e última interseção de linhas retas obtivemos os pontos $J=(AI) \cdot (DG)$, $K=(AI) \cdot (CH)$, $L=(EI) \cdot (CH)$ e $M=(BG) \cdot (FH)$;

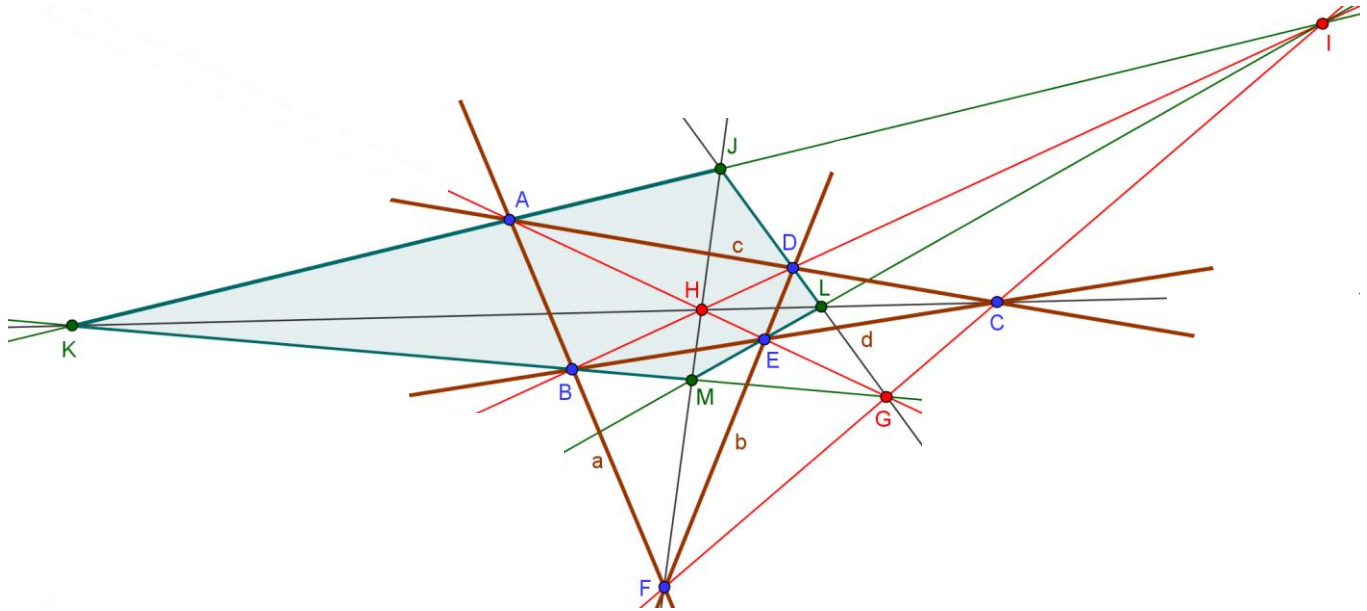


Fig.3.23 - União de pontos e interseção de linhas a partir dos lados de um quadrilátero

Uma observação atenta da figura3.23 permite-nos formular as seguintes conclusões:

- Da interseção duas a duas das quatro linhas retas a, b, c e d obtivemos seis pontos, logo, pela definição3.3, confirma-se que $abcd$ é um quadrilátero, sendo as retas a, b, c e d os seus lados, os pontos A, B, C, D, E e F os vértices e as linhas retas BD, AE e FC as linhas diagonais;
- As quatro linhas do quadrilátero geraram quatro novos pontos J, K, L e M , os quatro vértices do quadrângulo dual do quadrilátero $abcd$;
- O quarteto de retas FC, AE, KM e JL formam aquilo que em Geometria Projetiva designamos por conjunto harmónico de retas.

(A construção das Fig.3.9 e Fig.3.10 em *GeoGebra*, permite analisar algumas invariâncias deveras interessantes em cada uma delas).

Definição 3.4 Sejam A, B e C (ou a, b e c) os pontos diagonais de um quadrângulo (ou as retas diagonais de um quadrilátero). Chamaremos de triângulo diagonal o triângulo de vértices ABC (ou de lados abc).

Do já exposto decorre intuitivamente um processo novo de considerar os objetos geométricos ponto e reta. Pensaremos num ponto P como um feixe de retas que nele concorrem e numa reta r como

uma fileira de pontos nela incidentes. A Fig.3.24 sugere que o feixe de retas concorrentes no ponto P (feixe P) projeta uma fileira de pontos incidentes na reta r (fileira r), ou ainda, a fileira de pontos r é uma secção do feixe P .

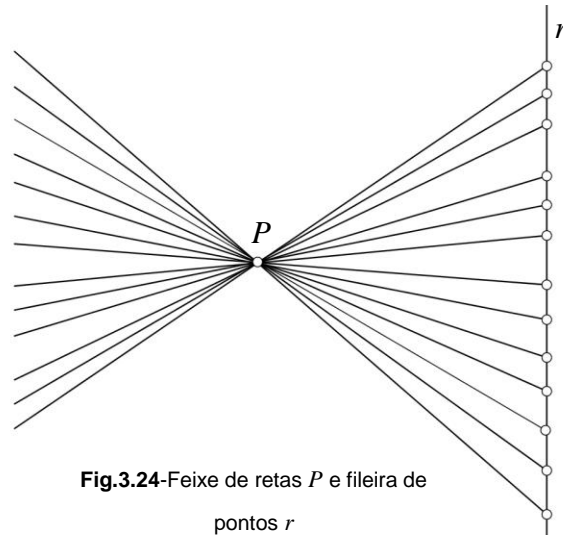


Fig.3.24-Feixe de retas P e fileira de pontos r

Definição 3.5 Dizemos que um ponto X projeta a reta x se $X = x \cdot p$, onde x passa por P distinto de X e p é uma reta não incidente a P e diferente da reta x . Neste caso dizemos também que a reta x projeta o ponto X . Chamaremos esse fato de correspondência elementar e denotamo-la da seguinte forma:

$$X \bar{\wedge} x \text{ ou } x \bar{\wedge} X.$$

A título de ilustração, na Fig.3.25 os pontos A, B e C são incidentes à reta p e as retas a, b e c são concorrentes em P .

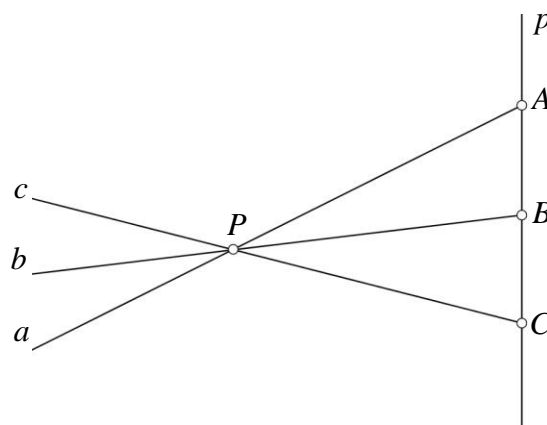


Fig.3.25 - Correspondência elementar

Temos então

$A \bar{\wedge} a$ (o ponto A projeta a reta a)

$B \bar{\wedge} b$ (o ponto B projeta a reta b)

$C \bar{\wedge} c$ (o ponto C projeta a reta c)

e como consequência podemos escrever

$$ABC \bar{\wedge} abc \text{ ou } abc \bar{\wedge} ABC$$

Dizemos nesse caso que a fileira de pontos ABC é uma secção do feixe de retas abc pelo ponto P . A definição que se segue generaliza o processo.

Definição 3.6 Chamaremos de projetividade uma combinação finita de correspondências elementares.

$$X \bar{\wedge} x \bar{\wedge} X' \bar{\wedge} x' \bar{\wedge} X'' \bar{\wedge} x'' \bar{\wedge} \dots \bar{\wedge} X^{(n)} \bar{\wedge} x^{(n)}$$

Podemos escrever simplesmente:

$$X \bar{\wedge} x^{(n)} \text{ ou } x \bar{\wedge} X^{(n)} \text{ ou } X \bar{\wedge} X^{(n)} \text{ ou } x \bar{\wedge} x^{(n)}.$$

Em termos práticos podemos considerar a projetividade, por exemplo, como uma transformação de um ponto X incidente a p numa reta $x^{(n)}$ passando por $P^{(n)}$ (Fig.3.26).

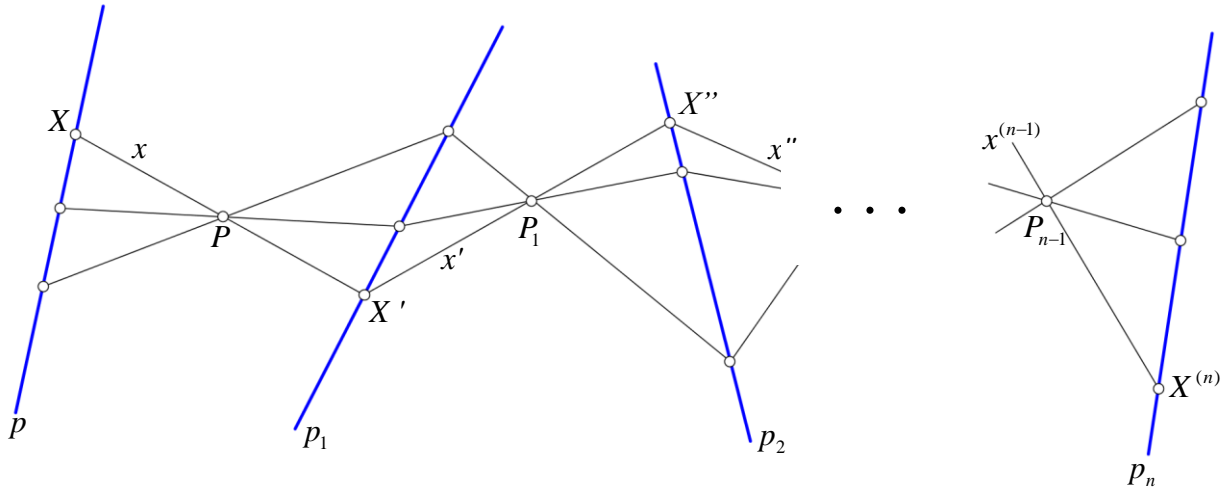


Fig.3.26 - Projetividade

A Fig.3.26 permite-nos observar que a projectividade escrita na forma simplificada, pode começar ou terminar tanto pelo ponto quanto pela reta.

$X \bar{\wedge} x^{(n)}$ representa uma projectividade que começa no ponto X e termina na reta $x^{(n)}$;

$x \bar{\wedge} X^{(n)}$ representa uma projectividade que começa na reta x e termina no ponto $X^{(n)}$;

$X \bar{\wedge} X^{(n)}$ representa uma projectividade que começa no ponto X e termina no ponto $X^{(n)}$;

$x \bar{\wedge} x^{(n)}$ representa uma projectividade que começa na reta x e termina na reta $x^{(n)}$;

Definição 3.7 Duas fileiras pontos são relacionadas por uma perspectividade de centro P se estas são secções de um feixe de retas por P com duas retas distintas p e

Definição 3.8 Dois feixes de retas são relacionados por uma perspectividade de eixo p se estes projetam de dois pontos distintos P e P_1 uma fileira de pontos em p .

p_1 . Ou seja, para toda reta XX' de pontos correspondentes o centro P é incidente a XX' .

Denotaremos da seguinte forma:

$$X \stackrel{P}{\bar{\bar{\wedge}}} X' \text{ ou } X \stackrel{P}{\wedge} X'$$

Ou seja, para todo ponto xx' de retas correspondentes o eixo p passa por xx' .

Denotaremos da seguinte forma:

$$x \stackrel{P}{\bar{\bar{\wedge}}} x' \text{ ou } x \stackrel{P}{\wedge} x'$$

Na Fig.3.27 estão ilustradas as situações descritas nas definições 3.7 e 3.8. Nessa figura os pontos A, B, C, D , e E assim como as retas a, b, c, d , e e são posições particulares do ponto X e da reta x referidos na definição.

Descrevemos as seguintes perspetividades:

$$ABCDE \stackrel{P}{\bar{\bar{\wedge}}} A'B'C'D'E' \text{ e } abcde \stackrel{p}{\bar{\bar{\wedge}}} a'b'c'd'e'$$

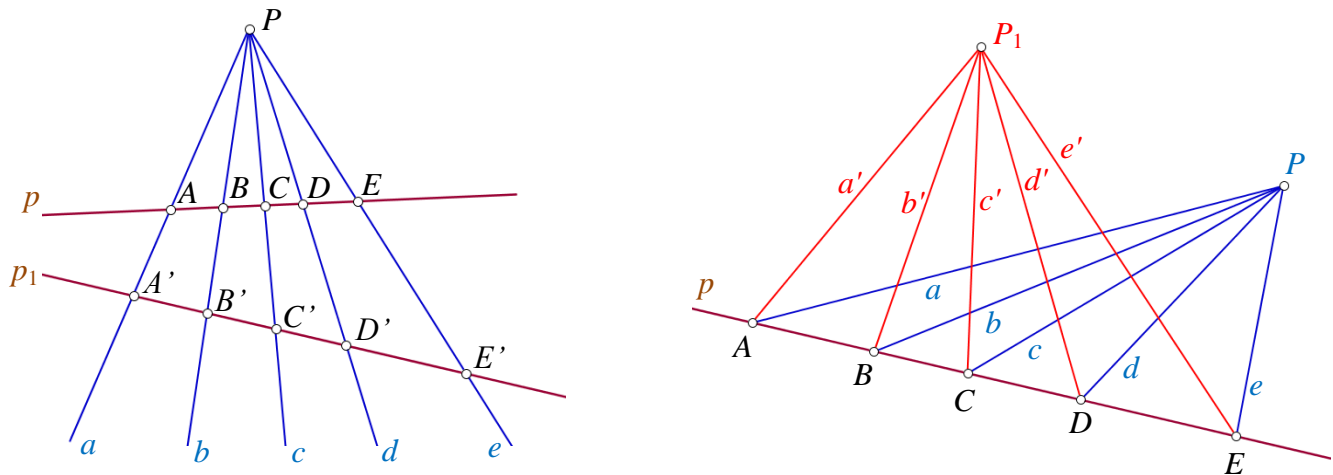


Fig.3.27 - Perspetividade

que também podem ser vistas como correspondências elementares do tipo

$$ABCDE \bar{\wedge} a'b'c'd'e' \bar{\wedge} A'B'C'D'E' \text{ e } abcde \bar{\wedge} ABCDE \bar{\wedge} a'b'c'd'e'$$

Logo a perspetividade é uma projectividade (definição 3.6)

Ainda a propósito das definições 3.7 e 3.8 convém reforçar o seguinte:

Relativamente à definição 3.7 dizer que $ABCDE \stackrel{P}{\bar{\bar{\wedge}}} A'B'C'D'E'$ é o mesmo que dizer que

$$(AP) \cdot p_1 = A', (BP) \cdot p_1 = B', (CP) \cdot p_1 = C', (DP) \cdot p_1 = D' \text{ e } (AE) \cdot p_1 = E';$$

Relativamente à definição 3.8 dizer que $abcde \stackrel{p}{\bar{\bar{\wedge}}} a'b'c'd'e'$ é o mesmo que dizer que

$$a \cdot a' = A, b \cdot b' = B, c \cdot c' = C, d \cdot d' = D \text{ e } e \cdot e' = E.$$

Definição 3.9 Duas figuras distintas, formadas de pontos e retas, dizem-se perspetivas se a cada par de pontos correspondentes associa-se uma reta que concorre num ponto O , (nas figuras perspetivas por um ponto, O é o centro dessa perspetividade) ou, se a cada par de retas correspondentes

associa-se um ponto sobre uma reta r (nas figuras perspectivas por uma reta, r é o eixo dessa perspectividade)

Um exemplo para essa definição é o da perspectividade de triângulos usada no teorema de Desargues:

Se ABC e $A'B'C'$ são triângulos perspectivos por um ponto, então existe $O = AA' \cdot BB' \cdot CC'$;

Se os mesmos triângulos são perspectivos por uma reta então os pontos $P = AB \cdot A'B'$, $Q = AC \cdot A'C'$ e $R = BC \cdot B'C'$ são colineares numa reta r (Fig.3.28).

Teorema 3.5 (Teorema de Desargues) Dois triângulo ABC e $A'B'C'$ são perspectivos por um ponto, se e só se, são perspectivos por uma reta. (Fig.3.28).

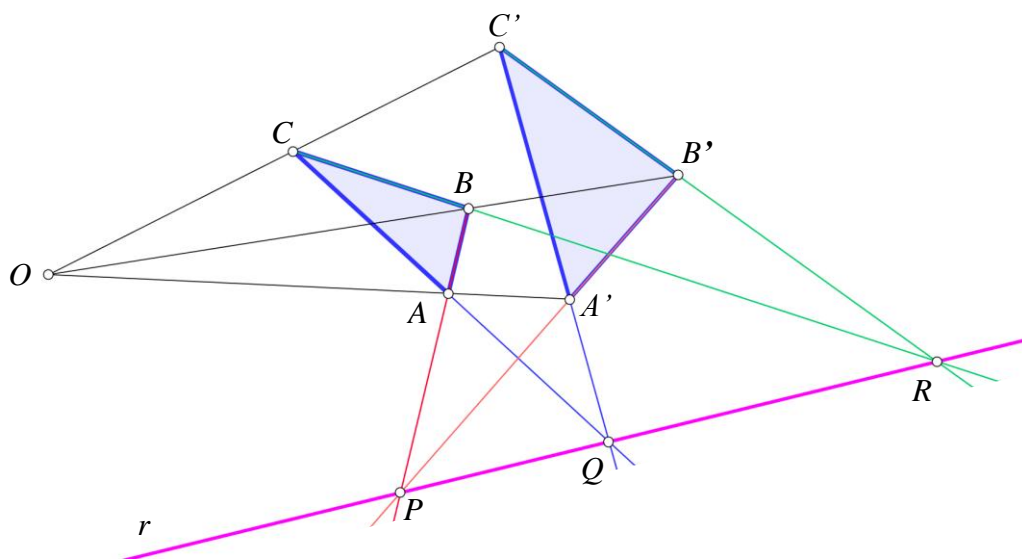


Fig. 3.28 - Perspetividade de dois triângulos (Teorema de Desargues)

O ponto O é o centro dessa perspectividade e a reta r é o eixo dessa perspectividade.

Outro resultado importante é o estabelecido pelo Teorema de Pappus

Teorema 3.6 (Teorema de Pappus) Se os vértices de um hexágono alternam entre duas retas, os três pares de lados opostos interseitam-se em pontos colineares (Fig.3.29).

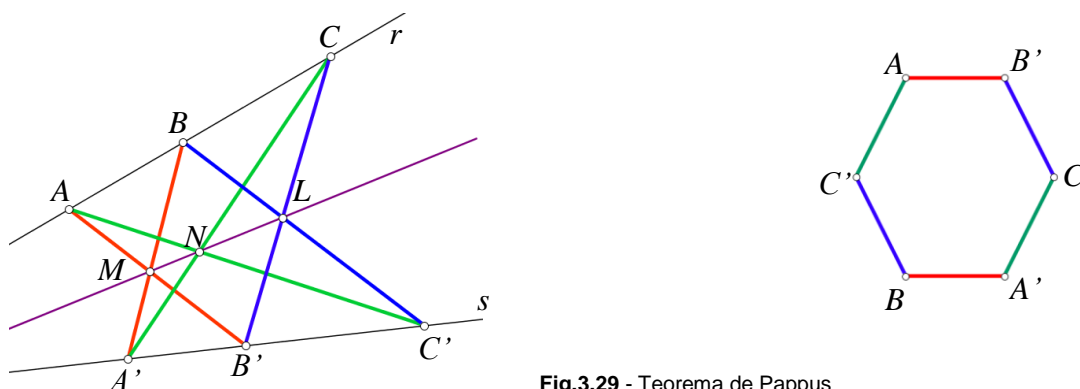


Fig.3.29 - Teorema de Pappus

O teorema de Pappus permite introduzir o conceito de eixo de projectividade entre duas fileiras de pontos.

Teorema 3.7 Toda projectividade que relaciona fileiras de pontos em retas distintas determina uma outra reta especial, o eixo, que contém todas as interseções das uniões cruzadas de cada dois pares de pontos correspondentes.

Relativamente à projectividade $ABC \bar{\wedge} A'B'C'$ da Fig.3.29 (teorema de Pappus) temos

$$AB' \cdot A'B = M, \quad AC' \cdot A'C = N \quad \text{e} \quad BC' \cdot B'C = L.$$

Podemos caracterizar uma projectividade em função do número de pontos que essa projectividade deixa invariantes.

Definição 3.10 Uma projectividade que associa uma fileira de pontos de uma reta a uma fileira de pontos dessa mesma reta é classificada como:

- (i) Elíptica, se a projectividade não deixa pontos invariantes.
- (ii) Parabólica, se a projectividade deixa somente um ponto invariante.
- (iii) Hiperbólica, se a projectividade deixa dois pontos invariantes.

Definição 3.11 Uma correlação é uma transformação ponto-reta e reta-ponto que respeita as relações de incidência de acordo com o princípio de dualidade. Uma correlação diz-se projetiva quando transforma pontos em retas e retas em pontos através de uma projectividade.

3.3.2. Polaridades

No atual contexto, assumiremos que o conceito de polaridade, remotamente introduzido por

Desargues (secção 3.2) é um tipo especial de correlação projetiva. E essa correlação é determinante para a definição projetiva das cónicas que apresentaremos mais adiante.

Reformulamos a definição 3.2 na proposição que se segue.

Proposição 3.2 Uma polaridade é uma correlação projetiva que transforma cada ponto A numa reta a e transforma cada reta a num ponto A . Chamamos a reta a de polar de A e o ponto A de polo deste.

Destacaremos, desde já, duas características importantes sobre as polaridades como correlação projetiva.

- (i) Uma polaridade preserva as incidências, isto é, dada, por exemplo, uma reta p de polo P , o conjunto de polares dos pontos sobre p formam um feixe de retas pelo ponto P . Ilustramos isso na

Fig.3.30, onde consideramos uma reta p , o seu polo P e uma secção cónica. A partir de cada ponto A sobre p traçamos duas retas tangentes à cónica e definimos como polar de A , a reta que liga os dois pontos de tangência. Os polares de todos os pontos de p formam um feixe cujas retas são incidentes no ponto P que é o polo de p . Dizemos que os elementos p e P são auto-polares.

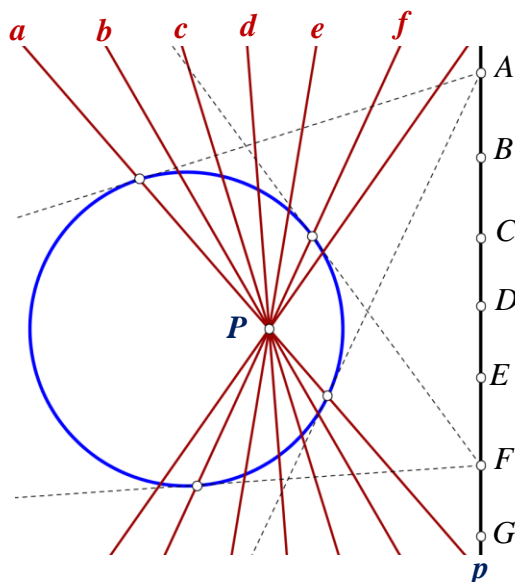


Fig.3.30 - A polaridade preserva incidências

(ii) Uma polaridade dualiza incidências, isto é, se um ponto A for incidente numa reta b então o polo B dessa reta será incidente na polar a do ponto A . Dizemos, neste caso, que A e B são pontos conjugados e as retas a e b são retas conjugadas (Fig.3.31).

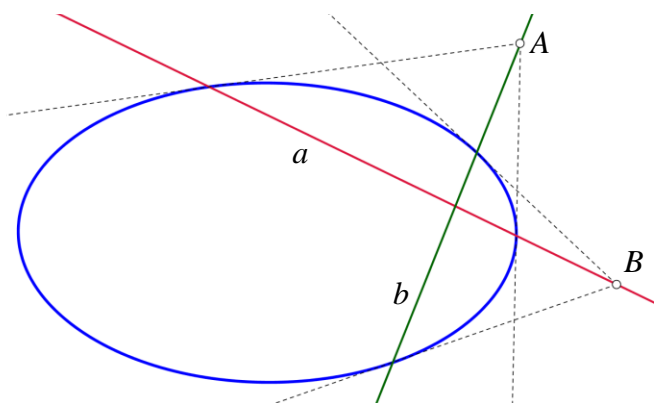


Fig.3.31 - A polaridade dualiza incidências

Definição 3.13 Dizemos que um ponto A é auto-conjugado se A for incidente ao seu polar.

Definição 3.14 Uma polaridade diz-se hiperbólica quando admite pontos auto-conjugados. Caso contrário diz-se elíptica.

Decorre das definições 3.13 e 3.14 que toda a polaridade hiperbólica admite uma reta auto-conjugada, a reta polar do ponto auto-conjugado.

Teorema 3.8 Toda reta passando por um ponto P auto-conjugado numa polaridade admite outro ponto auto-conjugado.

O teorema 3.8 garante que a existência de um ponto auto-conjugado para uma dada polaridade implica a existência de muitos pontos auto-conjugados.

3.4. Cónicas, uma definição projetiva

Ao longo da secção 3.3 expusemos alguns dos fundamentos da Geometria Projetiva ficando também expostas o essencial das ferramentas que permitirão estabelecer as definições para as cónicas em contexto projetivo.

3.4.1. Definição de cónica

Definição 3.15 (Von Staudt) Seja uma polaridade hiperbólica onde P é auto-conjugado. Chamamos cónica ao lugar geométrico dos pontos X tais que, $X \neq P$ é auto-conjugado sobre uma reta por P . Chamamos tangentes às retas polares de todos os pontos X .

Em linguagem simples e direta, chamamos cónica ao lugar geométrico dos pontos auto-conjugados numa dada polaridade. E às polares dos pontos auto-conjugados chamamos tangente às cónicas. Fica assim estabelecida uma definição de cónica como figura auto-dual: o lugar geométrico dos pontos auto-conjugados de uma polaridade [Fig.3.32(i)] e a envolvente das retas auto-conjugadas [Fig.3.32(ii)].

Doravante, todas as polaridades que referirmos serão hiperbólicas, ou seja, toda polaridade referida determina uma cónica. Falar de uma cónica é o mesmo que falar da polaridade a ela associada, falar de polo (ou polar) será sempre no sentido de polo (ou polar) relativamente a uma cónica, e, em vez de conjugado para a polaridade, será conjugado relativamente à cónica.

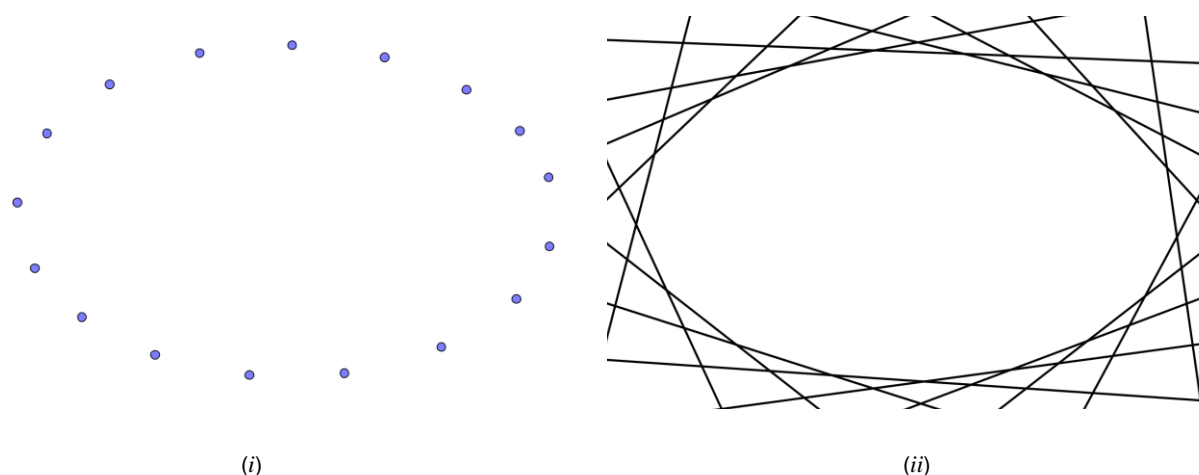


Fig.3.32 - Cónica como figura auto-dual

3.4.2. Construção de cónicas em contexto projetivo

Fica a dever-se ao matemático suíço Jacob Steiner (1796-1867) a criação de um método prático para construir cónicas utilizando resultados da Geometria Projetiva. Steiner baseou o seu princípio fundamental nas projectividades entre fileiras de pontos e feixes de retas segundo dois modelos esquemáticos, duais entre si, que passamos a descrever:

Modelo cónica-ponto - Partimos de dois feixes de retas a_1, b_1, c_1 e a_2, b_2, c_2 concorrentes respetivamente nos pontos O_1 e O_2 (Fig.3.33).

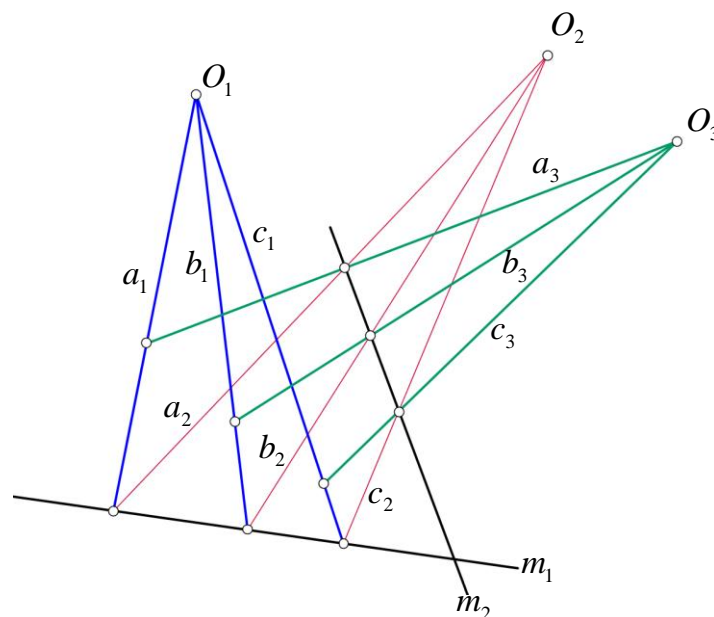


Fig.3.33 - Relação projetiva entre dois feixes de retas (Steiner)

A seguir relacionamos ambos os feixes por meio da fileira de pontos que define uma secção m_1 . Por último, tomamos um terceiro feixe de retas a_3, b_3, c_3 , concorrentes em O_3 e relacionamos O_2 e O_3 através da secção m_2 . Então temos que os feixes O_1 e O_3 ficam relacionados nas interseções $a_1 \cdot a_3$, $b_1 \cdot b_3$ e $c_1 \cdot c_3$. Este tipo de relação entre os dois feixes O_1 e O_3 é uma projectividade. Por isso, a sua descrição pode ser feita de forma mais dinâmica do seguinte modo:

A fileira m_1 projeta o feixe O_1 no feixe O_2 e a fileira m_2 projeta o feixe O_2 no O_3 . Os feixes O_1 e O_3 ficam relacionados pelas interseções das retas correspondentes, isto é, os pontos $a_1 \cdot a_3$, $b_1 \cdot b_3$ e $c_1 \cdot c_3$.

Através deste sistema Steiner construía uma cónica, sendo O_1 e O_3 dois pontos da mesma, ficando determinados os demais pontos pelas interseções de retas homólogas na projectividade (Fig.3.34).

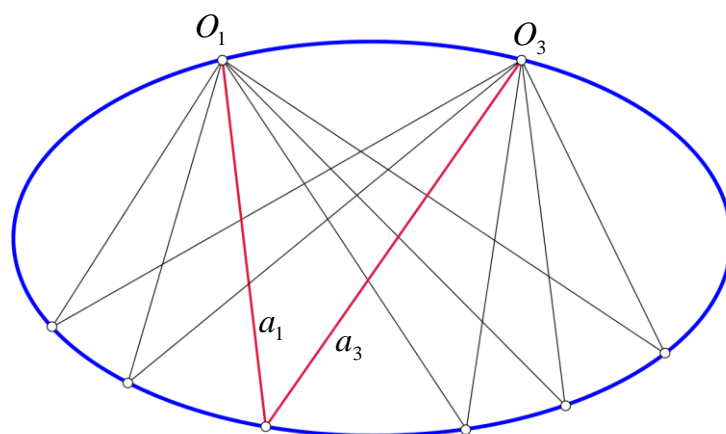


Fig.3.34 - Cónica de Steiner

Na Fig.3.35, Fig.3.36 e Fig.3.37, ilustramos as imagens projetivas da parábola, da elipse e da hipérbole, respetivamente, segundo o modelo cónica-ponto de projetividade. É a cónica como conjunto de pontos resultantes da interseção de retas numa relação projetiva de dois feixes. (As imagens foram obtidas em simulação no *GeoGebra*).

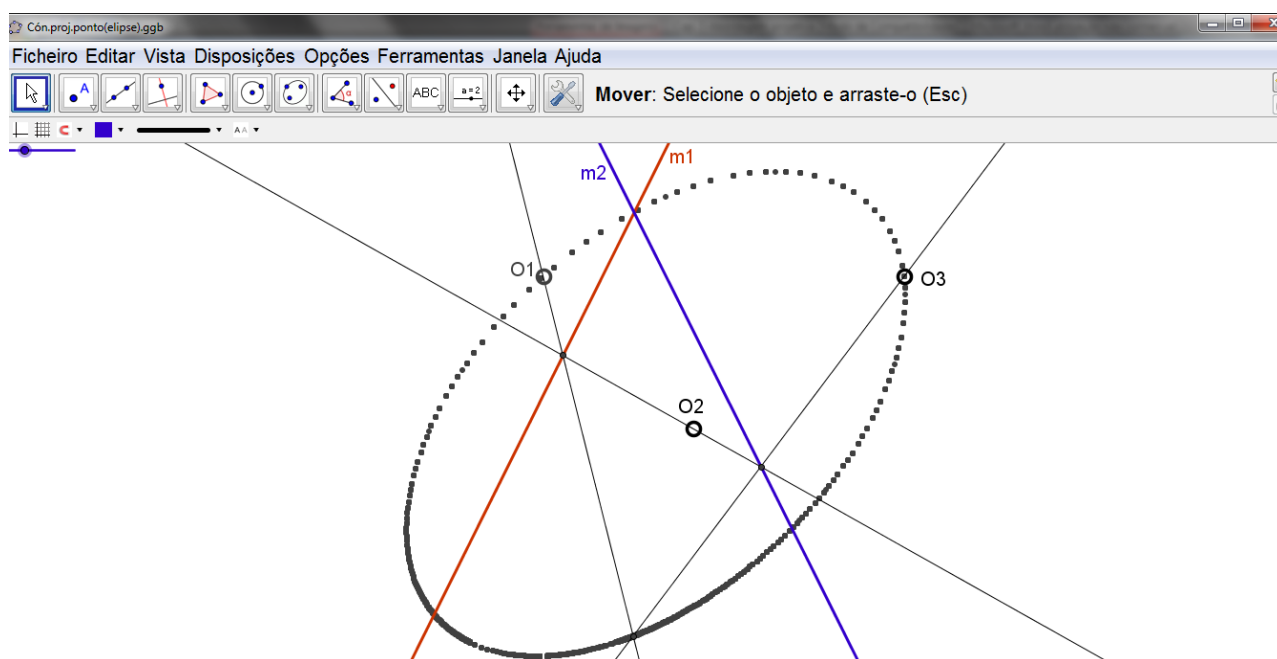


Fig. 3.35 - Imagem da elipse como “cónica-ponto”

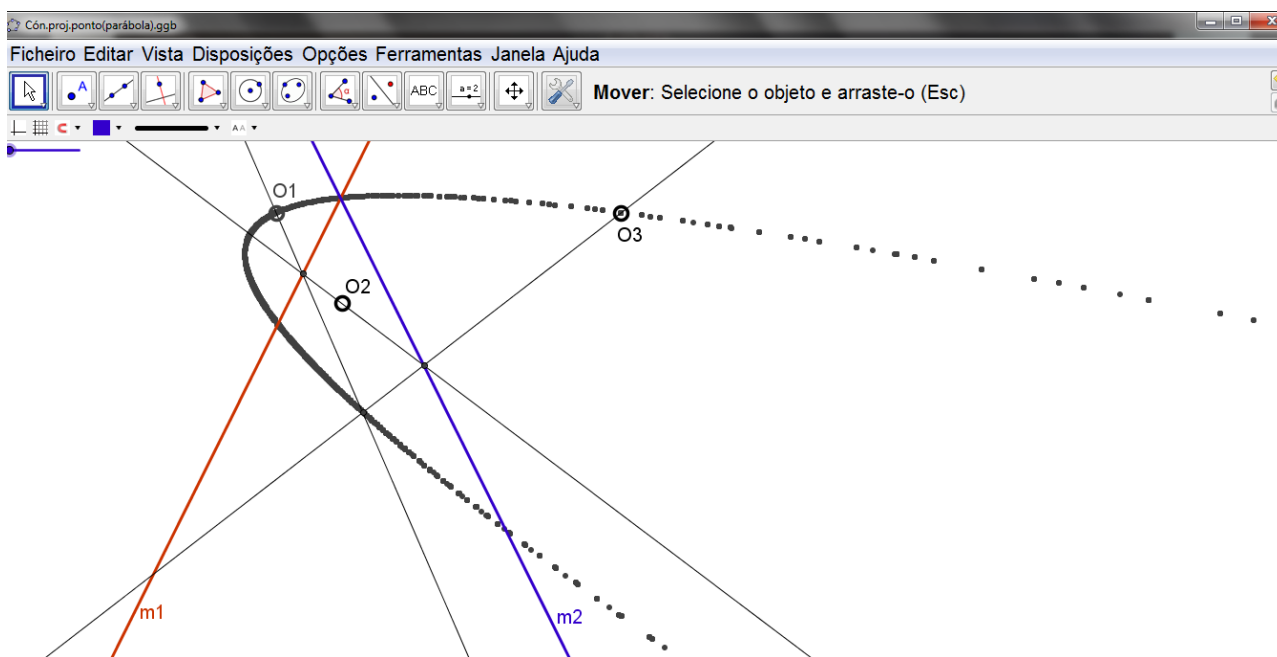


Fig.3.36 - Imagem da parábola como “cónica ponto”

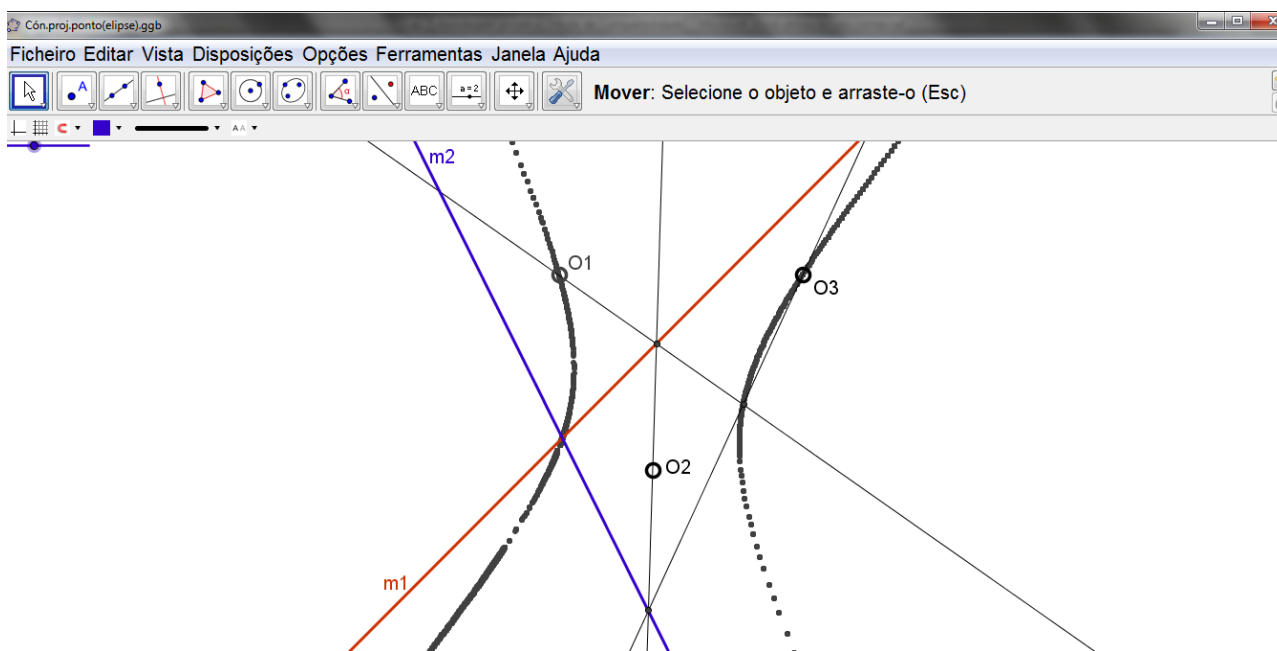


Fig.3.37 - Imagem da hipérbole como “cónica ponto”

Modelo cônica-linha (dual do modelo cônica-ponto) - Na Fig.3.38, pela projeção central O_1 a fileira m_1 é projetada na m_2 e pela projeção central O_2 a fileira m_2 é projetada na m_3 . As fileiras m_1 e m_3 ficam relacionadas pela união dos pontos em correspondência, ou seja, as retas A_1A_3 , B_1B_3 , C_1C_3 , etc. Neste modelo de projetividade a cônica é determinada pelas envolventes (tangentes à cônica) A_1A_3 , B_1B_3 , C_1C_3 , etc.

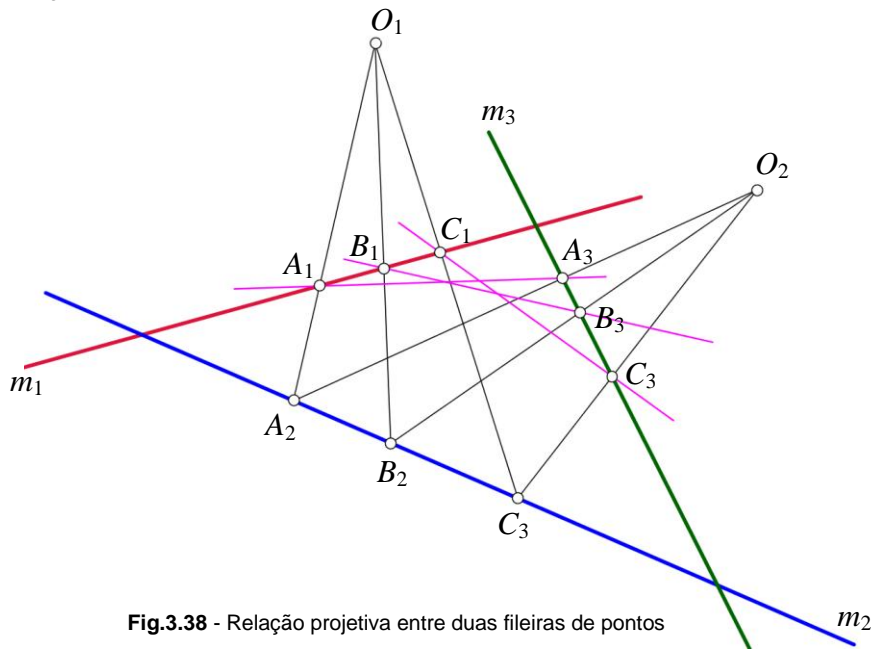


Fig.3.38 - Relação projetiva entre duas fileiras de pontos

Na Fig.3.39, Fig.3.40 e Fig.3.41, ilustramos as imagens projetivas da parábola, da elipse e da hipérbole, respetivamente, segundo o modelo cônica-linha de projetividade. É a cônica como conjunto de linhas (tangentes) resultantes da união de pontos numa relação projetiva de duas fileiras. (As imagens foram obtidas em simulação no *GeoGebra*).

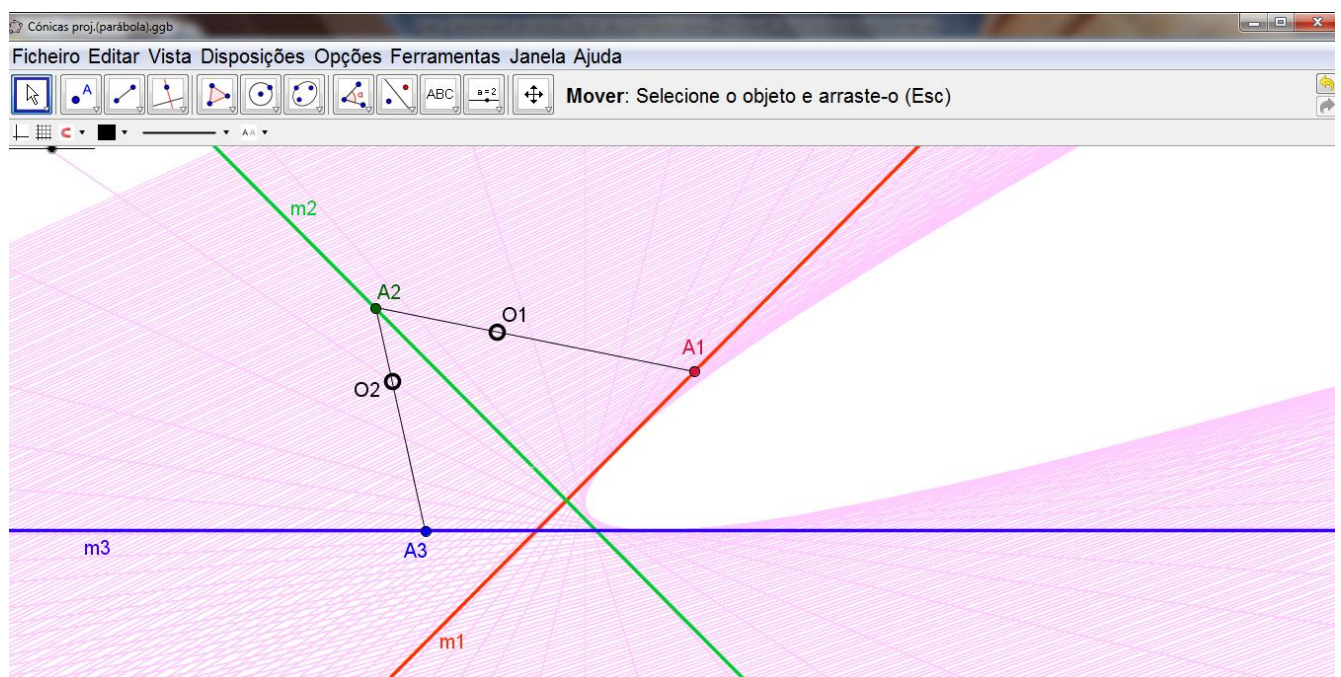


Fig.3.39 - Imagem da parábola como "cônica linha"

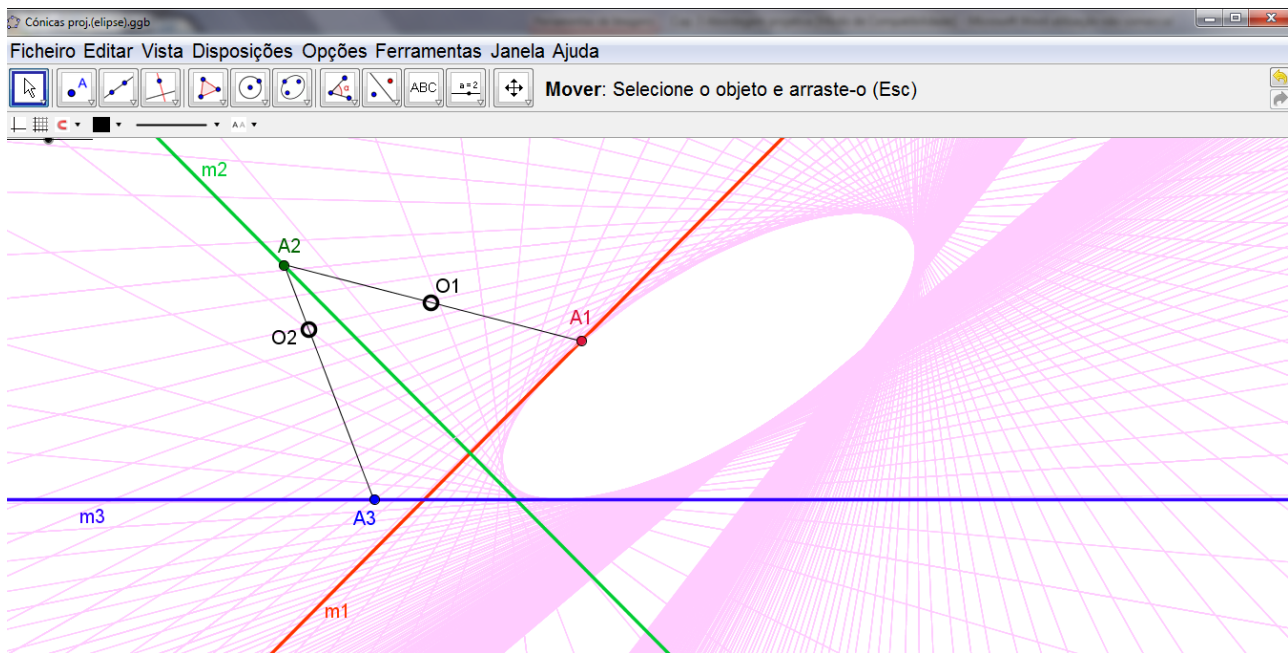


Fig.3.40 - Imagem da elipse como “cónica linha”

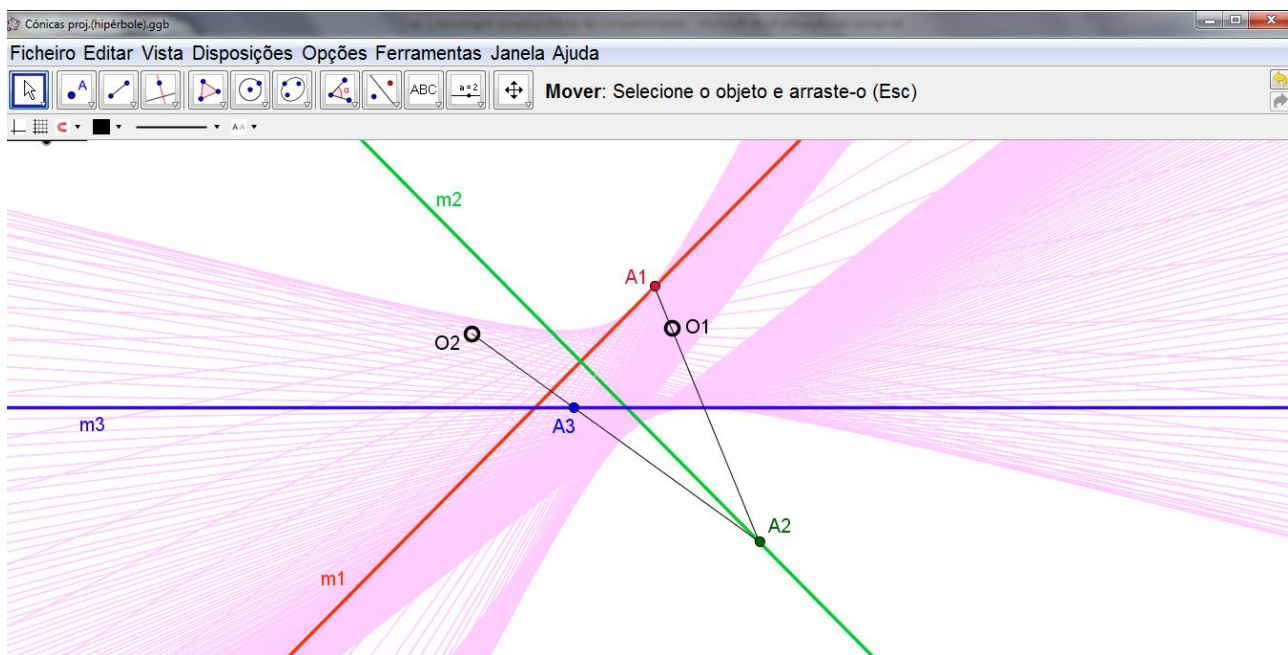


Fig.3.41 - Imagem da hipérbole como “cónica linha”

3.5. Teoremas emblemáticos sobre as cónicas em contexto projetivo

Se tivéssemos de eleger uma característica da Geometria Projetiva, ela seria sem dúvida a dualidade. Tanto assim é que a generalidade dos livros de Geometria Projetiva se caracteriza por ter muitas das suas páginas escritas a dupla coluna, de forma que numa tem um resultado e noutra a versão dual deste. Vem isto a propósito dos teoremas de Pascal e de Brianchon.

Blaise Pascal (1623-1662) tinha 16 anos quando estabeleceu o seu famoso teorema sobre as cónicas (Pascal era um fervoroso adepto das teorias de Desargues desde essa idade!).

Teorema 3.9 (Teorema de Pascal): Se um hexágono está inscrito numa cónica, então os lados opostos (prolongados) intersectam-se em três pontos colineares (Fig.3.42).

A força do princípio de dualidade ficou manifesto quando Charles-Julien Brianchon (1783-1864) publicou em 1806 no *Journal* da Escola Politécnica de Paris a demonstração do seguinte teorema:

Teorema 3.10 (Teorema de Brianchon): Dado um hexágono qualquer circunscrito a uma secção cónica, as diagonais deste concorrem num ponto (Fig.3.43)

Como que por arte e magia, Brianchon limitou-se a estabelecer o teorema dual de Pascal.

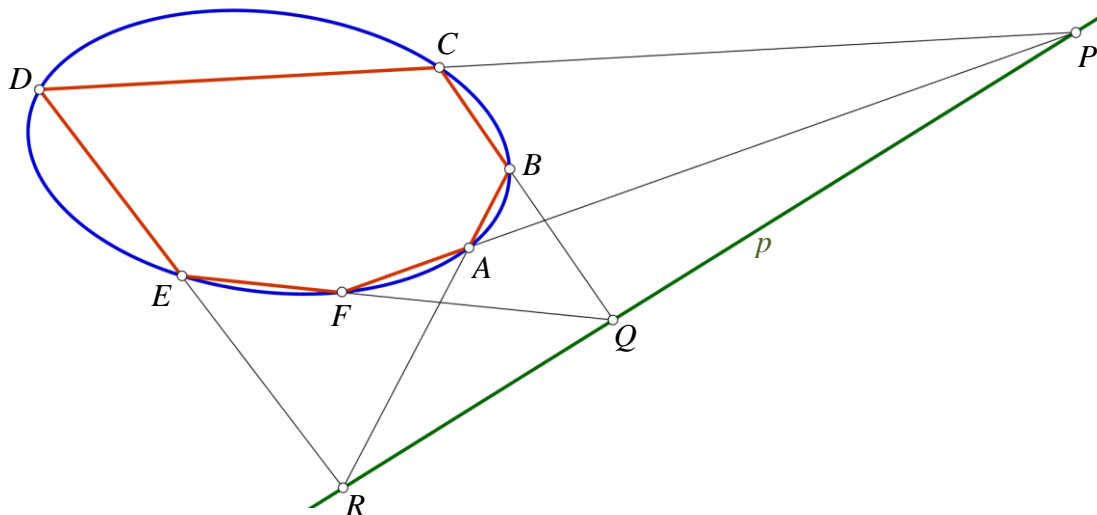


Fig.3.42 - Teorema de Pascal

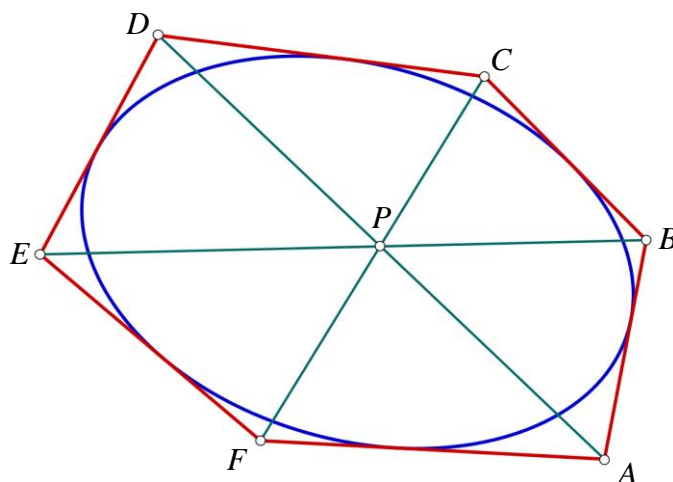


Fig.3.43 - Teorema de Brianchon

Capítulo 4

Abordagem Didática das Cónicas

4.1. Uma homenagem a Coménio, o alegado “pai” da Didática Moderna

A didática é um ramo da pedagogia que se ocupa dos métodos e técnicas de ensino, destinados a colocar em prática as diretrizes da teoria pedagógica. Costuma associar-se a didática a Jan Amos Komenský, mais conhecido por Coménio, criador da mais bela utopia pedagógica de sempre: "Ensinar tudo a todos". Na sua obra de referência *Didática Magna*, Coménio defende ideias muito progressistas para o séc. XVII ao evidenciar nessa obra um interesse genuíno pela relação ensino-aprendizagem, levando em conta haver diferença entre o ensinar e o aprender. Foi o primeiro teórico a respeitar a inteligência e os sentimentos da criança. São suas propostas:

- Uma educação realista e permanente;
- Adoção de método pedagógico rápido, económico e sem fadiga;
- Ensino a partir de experiências quotidianas;
- Conhecimento de todas as ciências e de todas as artes;
- Conceção do ensino unificado.

Oriundo de uma família eslava e protestante, Coménio nasceu em 28 de março de 1592, na cidade de Uherský Brod (ou Nivnitz), na Morávia, Europa Central, região que pertencia ao antigo Reino da Boémia e hoje integra a República Checa. Viveu e estudou na Polónia e Alemanha (onde cursou Teologia e aprimorou seus estudos de Astronomia e Matemática). Nas suas demandas pela Europa exerceu as atividades de pastor protestante e professor, dedicando-se também à redação de escritos religiosos. Permaneceu seis anos no reino da Suécia, contratado para promover a reforma do ensino e ali cruzou-se com René Descartes, que lá vivia sob a proteção da rainha Cristina. Coménio terminou seus dias em Amsterdão (Holanda) onde foi acolhido como educador e reformador social. Morreu a 15 de Novembro de 1671. Foi postumamente galardoado em 1956, na Conferência Internacional da UNESCO em Nova Deli (Índia) com a publicação de todas as suas obras pelo organismo, que o apontou como um dos primeiros mentores das ideias que inspiraram, quase 300 anos depois, a fundação da UNESCO.

Para além da *Didática Magna* destacam-se outras obras tais como *Guia da Escola Materna* (1630), *Porta Aberta das Línguas* (1631) e *Mundo Ilustrado* (1651).

Subscrevemos plenamente alguns dos princípios didáticos de Coménio, que resumimos nos tópicos seguintes:

- Tudo o que se deve saber deve ser ensinado;
- Qualquer matéria que se ensine deverá ser ensinada na sua aplicação prática e uso definido;
- Deve ensinar-se de maneira direta e clara;
- Deve ensinar-se a verdadeira natureza das coisas, partindo de suas causas.

Uma abordagem didática das cónicas no sentido comeniano do termo seguirá as diretrizes que passamos a indicar:

- Referir a importância da história como veículo do conhecimento e fonte motivadora para a descoberta;
- Desenvolver alguns aparatos de construção das cónicas, privilegiando a utilização de materiais manipuláveis de forma real e/ou virtual (recorrendo a softwares de geometria dinâmica);
- Descrever as inúmeras aplicações das cónicas, explorando as suas propriedades refletoras (propagação de ondas sonoras e luminosas) e as suas propriedades métricas na definição de lugares geométricos (o sistema LORAN);
- Elaborar um plano de aula com propostas de atividades práticas conjugando os vários elementos da ação didática: o professor, o aluno, a disciplina (matéria ou conteúdo), o contexto da aprendizagem e as estratégias metodológicas;

4.2. A importância da história

“Creio que não é possível compreender as matemáticas de hoje se não se tiver pelo menos uma ideia sumária da sua história”

Jean Dieudonné (1906 – 1992)

Segundo Eduardo Veloso (Geometria – Temas atuais) o estudo que se faz tradicionalmente no ensino secundário das cónicas é essencialmente analítico, desligado da conceção histórica das mesmas como secção de um cone. Os conceitos de foco e diretriz envolvidos no estudo analítico têm a sua origem histórica omissa e desligada da definição primitiva, sintética das cónicas. De facto, na generalidade dos manuais escolares fica-se pelas definições focais: a elipse é o conjunto de todos os pontos do plano para os quais a soma das distâncias d_1 e d_2 a dois pontos fixos F_1 e F_2 (os focos) é constante (figura 4.1). Se os focos coincidem, a elipse reduz-se a uma circunferência. Uma hipérbole é o conjunto de todos os pontos do plano para os quais a diferença $|d_1 - d_2|$ é constante. Uma parábola é o conjunto de todos os pontos do plano para os quais a distância a um ponto fixo F (foco) é igual à distância a uma dada reta (diretriz) Para contrariar esta tendência que consideramos, em concordância com Veloso, didaticamente errada para o ensino desta matéria, propomos a apresentação, ainda que breve, do relato sobre a origem geométrica dos conceitos de foco e diretriz soberbamente desenvolvido por P. G. Dandelin na secção 1.3 do capítulo1. As esferas de Dandelin permitem fazer a localização geométrica precisa e objetiva quer dos focos quer das diretrizes conferindo-lhes uma existência geometricamente concreta.

Atualmente, com a erradicação das cónicas do programa do ensino secundário, a única referência

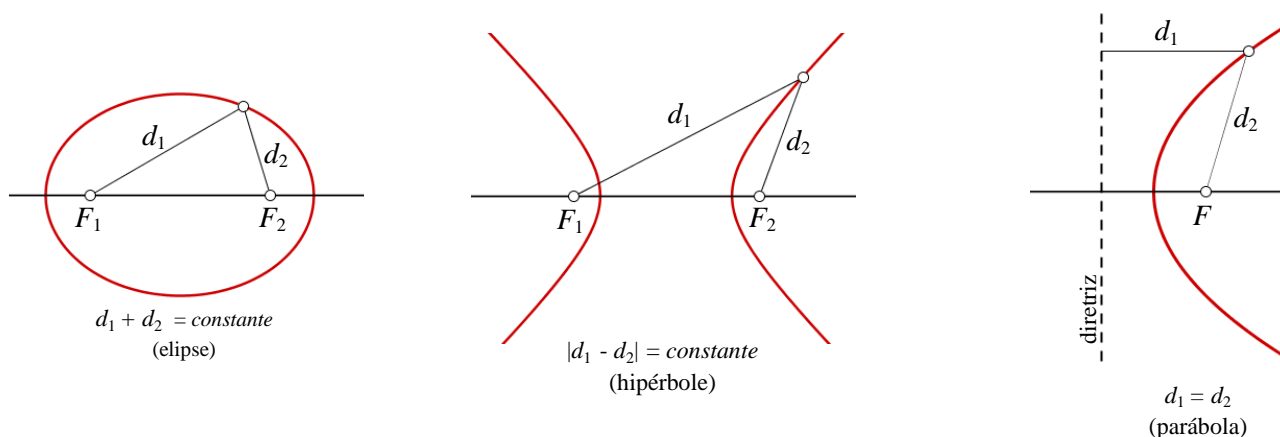


Fig.4.1 - Definições focais das cónicas

passa pela parábola por ser a única enquadrada no conceito de função, particularmente a função quadrática ou polinomial do segundo grau ($ax^2 + bx + c$). Mesmo assim, a sua íntima ligação com o universo das cónicas é normalmente ignorada pelos professores na sua apresentação.

A história das cónicas é demasiado rica para ser ignorada e toda a teoria subjacente à sua génese e primeiros desenvolvimentos constitui um dos últimos legados da matemática grega. Conforme vimos no capítulo 1, os gregos, mesmo longe das modernas ferramentas da Geometria Analítica, fizeram um uso perfeito das ideias de “coordenadas” (abscissa e ordenada) para o estudo de figuras particulares, em relação a dois eixos do plano. O processo remonta a Menecmo aquando da tentativa de resolução do problema clássico da duplicação do cubo. Para muitos historiadores foi com Apolónio de Perga que a matemática grega atingiu o seu zénite, exatamente pelo seu extraordinário contributo no estudo das cónicas e que graças à famosa Coleção de Matemática de Pappus perdurou até o início do Renascimento, período em que o conceito de cónicas assume novas dimensões no âmbito das suas aplicações na arquitetura, artes e engenharia. Leonardo Da Vinci (1452-1519) utilizou largamente as curvas cónicas, tanto nos seus desenhos, como nas construções de suas “máquinas”.

Concluimos esta parte reafirmando o valor didático patente em toda a narrativa histórica dos factos matemáticos, na medida em que a própria história da matemática contribui para a construção do conhecimento do aluno, quer pelas contextualizações estabelecidas, quer pelas expectativas que suscita. É de resto a filosofia seguida por Veloso, na abordagem histórica que faz a propósito das cónicas, da qual transcrevemos um pequeno excerto: «...Kepler, apoiando-se nas observações do astrónomo Tycho Brahe, publica em 1609 a sua descoberta de que a órbita de Marte em torno do sol é uma elipse (e não uma oval, como tinha pensado anos antes). Assim, as cónicas, objetos “puramente” matemáticos, sem aparente relação com a realidade objetiva, descobertas há cerca de dois mil anos a propósito de uma “advinha” passada pela pitonisa de Delfos, revelavam finalmente a sua íntima ligação com a natureza, em particular com a trajetória dos planetas do sistema solar. Poucos anos depois Galileu mostra que a trajetória de um projétil lançado para o espaço é uma parábola (apenas aproximadamente, devido à resistência do ar). Algumas dezenas de anos depois,

cerca de 1680, Newton unifica estas descobertas, mostrando que as trajetórias não podiam deixar de ser essas devido à sua lei de gravitação universal».

4.3. Alguns aparatos de construção das cónicas

É reconhecido o capital didático que representam as atividades que envolvem construções, sobretudo as de carácter manipulatório.

Nesta secção vamos debruçar-nos sobre métodos práticos para o traçado das cónicas recorrendo quer a materiais manipuláveis (madeira, fios, pregos...) quer a softwares de Geometria Dinâmica (Cabri, Sketchpad, GeoGebra, ...).

4.3.1. Método do jardineiro

Trata-se de um método bem conhecido para a construção da elipse, que pela sua fácil e exequível operacionalidade permite reproduzir a definição focal da elipse.

- Fixamos dois pregos numa prancheta de madeira nos pontos F_1 e F_2 ;
- Recorrendo a um fio de comprimento superior a F_1F_2 fixamos cada uma das suas extremidades nos pregos F_1 e F_2 ;
- Traçamos uma curva mantendo o fio bem esticado com a ponta do lápis (Fig.4.2).

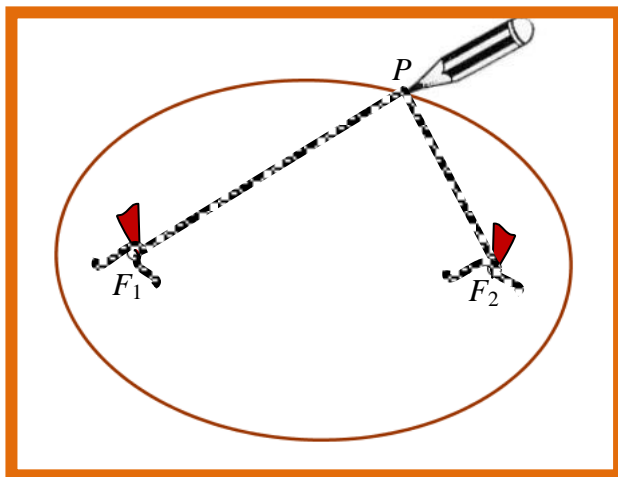


Fig.4.2 - Construção da elipse pelo método de jardineiro

A curva obtida é uma elipse com os focos F_1 e F_2 satisfazendo a equação $PF_1 + PF_2 = \text{constante}$, para todo o ponto P da curva (definição focal).

4.3.2. Mecanismo de Van Schooten

- AB e BC são hastes articuladas no ponto B ;

- A haste AC tem uma ranhura onde o ponto C se pode deslocar sendo o ponto A fixo;
- O ponto D sobre a haste BC descreve uma elipse de centro em A .

(Fizemos uma simulação em GeoGebra) (Fig. 4.3)

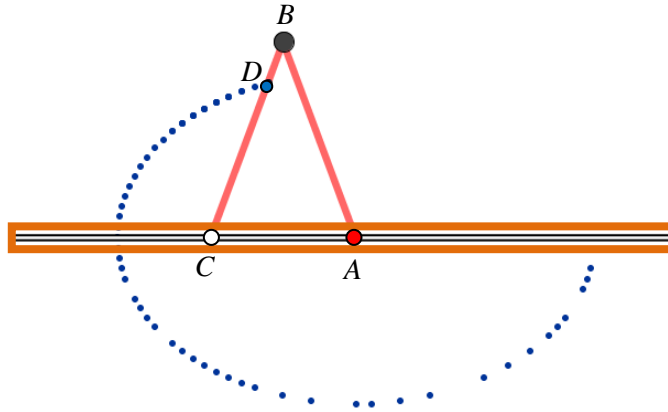


Fig.4.3 – Construção da elipse segundo o Mecanismo de Van Schooten

4.3.3. Método Danny Viscaino e Joseph Carnoy

- c_1 e c_2 são circunferências concêntricas;
- A semirreta r intersesta a circunferência c_1 em Q e a circunferência c_2 em R ;
- Os pontos P da elipse resultam da interseção da paralela ao diâmetro CD tirada por R com a paralela ao diâmetro AB tirada por Q ;
- AB e CD são os eixos da elipse (Fig.4.4).

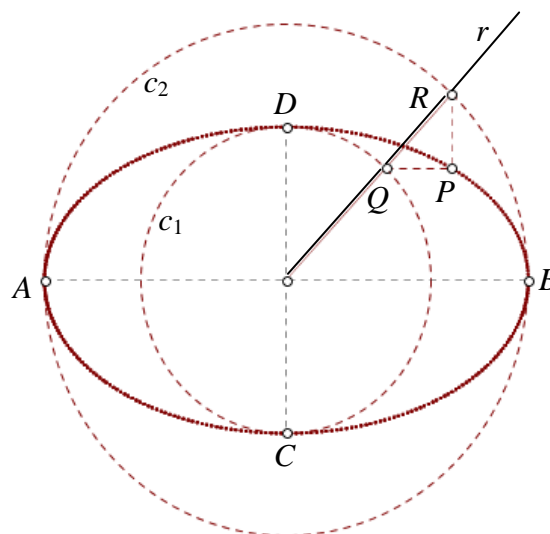


Fig.4.4 - Construção da elipse segundo D. Viscaino e J. Carnoy

Pensou-se inicialmente que o autor do método fosse Danny Viscaino (estudante californiano da Montain View Hight School) que “acidentalmente” tê-lo-ia engendrado com o *sketchad*, até que se

veio a concluir tratar-se de uma meritória redescoberta, pois o mesmo método estava incluído numa publicação de 1912, da autoria de Joseph Carnoy.

4.3.4. Traçado da parábola com uma régua em forma de T

- Fixamos um prego na prancheta num ponto F (foco da parábola);
- Recorrendo a um fio de comprimento ligeiramente superior ao da régua T , prendemos uma das extremidades no prego F e outra no tronco da régua (Fig.4.5);
- Traçamos uma curva deslizando a régua T ao longo da diretriz (borda inferior da prancheta) enquanto mantemos o fio esticado com o lápis e em contacto com o tronco da régua T . A curva obtida é parte de uma parábola com foco F e diretriz a reta na qual desliza a régua T .

Notemos que ao longo do movimento a ponta do lápis mantém-se equidistante ao foco F e à diretriz, em conformidade com a caracterização focal da parábola.

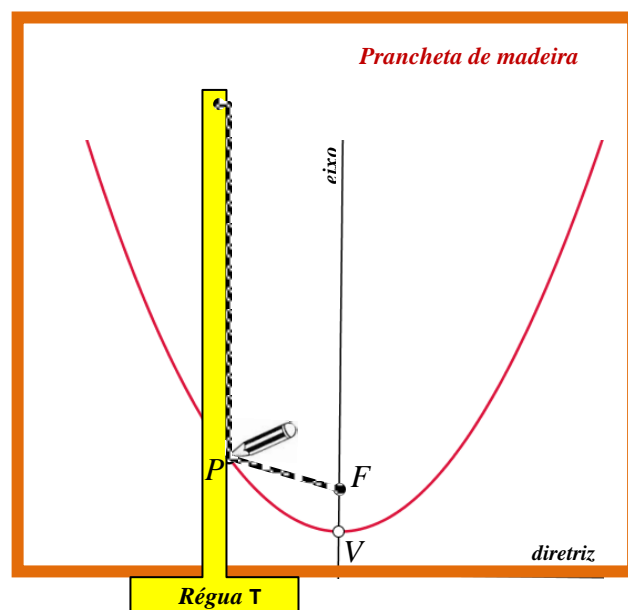


Fig.4.5 - Construção da parábola utilizando uma régua em forma de T

4.3.5. O método das dobragens

Intuitivamente, conhecendo a reta tangente em cada ponto de uma curva plana, podemos conjecturar acerca da natureza dessa curva, a menos de uma posição no plano. No caso das cónicas o processo é particularmente fácil e é vulgarmente conhecido por “construção da cónica pelo método de dobragem de papel”. O processo é levado a cabo usando a caracterização das cónicas por meio das suas propriedades focais e, sobretudo pelos pressupostos de tangência enunciados nas proposições 2.2, 2.3, e 2.4 da secção 2.5 no capítulo 2.

4.3.5.1. Construção da parábola

A construção manual é feita usando uma folha de papel transparente. Seguem-se os procedimentos:

- Desenha-se uma reta horizontal d (diretriz da parábola), na folha de papel vegetal e marca-se, fora dessa reta, um ponto fixo F (foco da parábola);
- Seleciona-se um ponto D sobre a reta e dobra-se o papel de forma a fazer coincidir os pontos D e F . A Fig.4.6 ilustra a construção de uma dobragem. Ela coincide com a reta t (tangente à parábola);

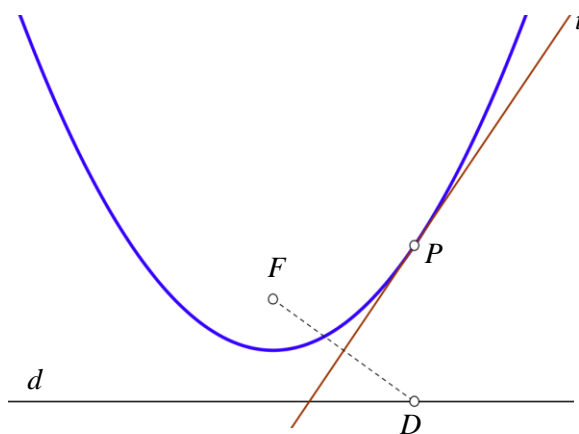








Fig.4.6 - Reta tangente à parábola como vinco de uma dobragem

- Repete-se essa operação para diferentes escolhas de pontos sobre a diretriz. Realizando esta operação várias vezes, podemos observar que as dobras configuram tangências a uma curva que é uma parábola.

É possível fazer uma simulação no GeoGebra. Eis o roteiro:

- Construir uma reta  d e um ponto F fora da reta d ;
- Utilizar a ferramenta ponto sobre objeto  e representar um ponto D sobre a reta d ;
- Construir a mediatriz  t do segmento DF ;
- Construir a perpendicular  p à reta d , por D ;
- Com a ferramenta ponto de interseção , obter o ponto P , interseção de t e p ;
- A parábola é o lugar geométrico dos pontos P quando D se move ao longo da reta d ;
- Utilizar a ferramenta  Ativar Traço para a mediatriz t e, de seguida, iniciar a animação que faz mover o ponto D ao longo da reta d . O rasto deixado pela reta t representa as dobras. A imagem final está na Fig.4.7.

4.3.5.2. Construção da elipse

Procedimentos para a construção manual:

- Sobre uma folha de papel transparente marcar um ponto F_1 mais ou menos no centro da folha;

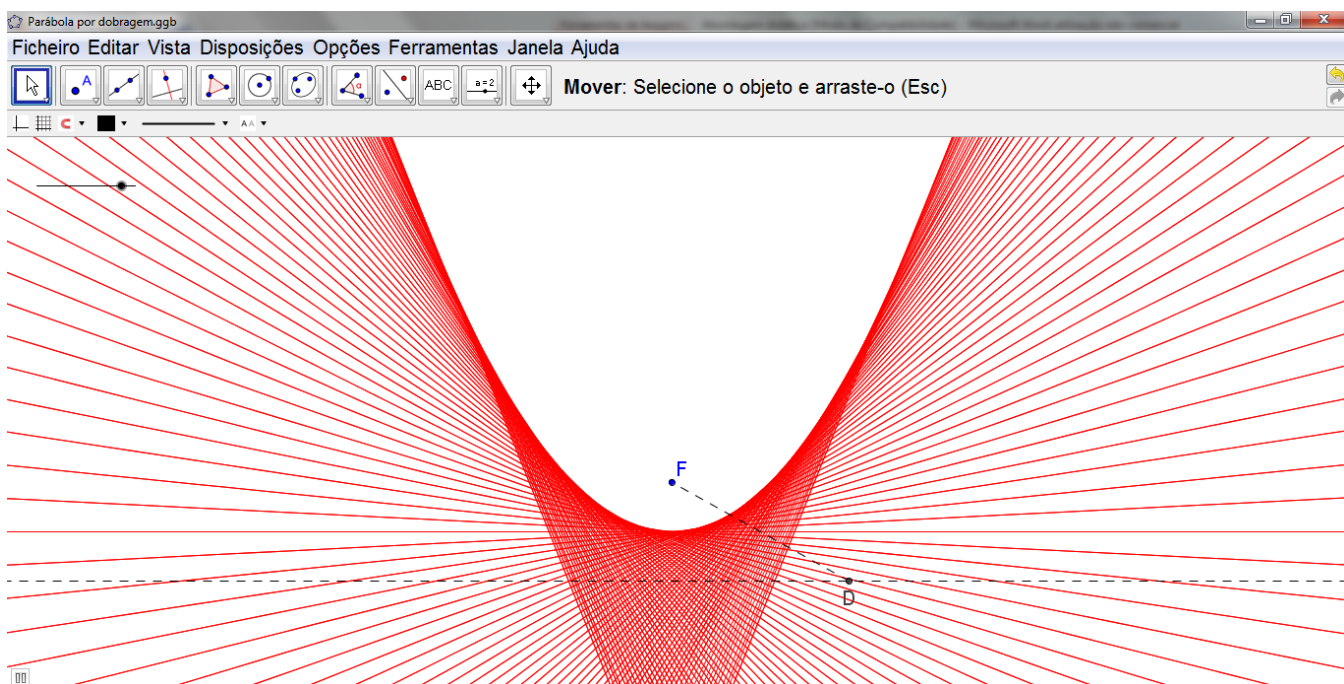


Fig.4.7 - Imagem da parábola construída pelo método das dobragens (simulação em GeoGebra)

- Com o auxílio do compasso, desenhar dois círculos centrados em F_1 e de raios $2a$ e $2c$ (c menor do que a);
- Traçar uma semirreta horizontal com origem em F_1 para determinar o ponto F_2 interseção da semirreta com o círculo de raio $2c$;
- Escolher um ponto D sobre o círculo de raio $2c$ e dobrar o papel vegetal de forma a fazer coincidir os pontos D e F_1 . A Fig.4.8 ilustra a construção de uma dobra. Ela coincide com a reta t tangente à elipse;

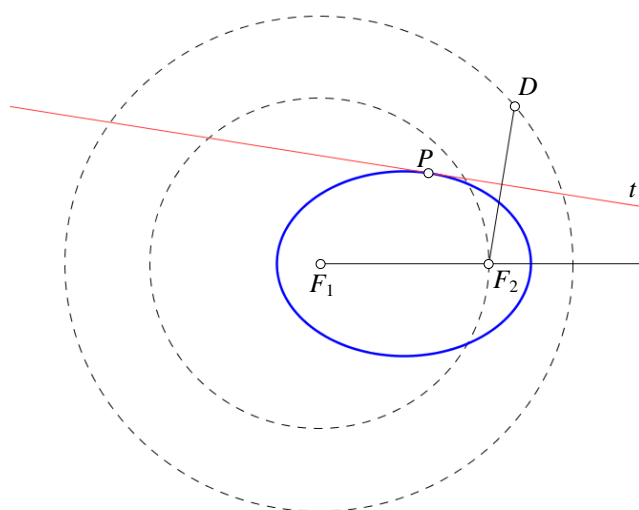


Fig.4.8 - Reta tangente à elipse como vinco de uma dobragem

- Repetir essa operação para diferentes escolhas do ponto D . Depois de repetir a operação um grande número de vezes, podemos observar que as dobras configuram tangências a uma curva;
- O lugar geométrico dos pontos de tangência P quando D percorre o círculo de raio $2c$ é uma elipse.

Simulação no GeoGebra:

- Construir dois segmentos de medidas $2a$ e $2c$ com $2a > 2c$;
- Construir uma reta r e um ponto F_1 sobre r ;
- Construir dois círculos concêntricos de centro F_1 com raios $2a$ e $2c$;
- Com a ferramenta ponto de interseção obter o ponto F_1 , interseção da reta r com o círculo de raio $2c$;
- Utilizar a ferramenta ponto sobre objeto para marcar um ponto D sobre o círculo de raio $2a$;
- Construir a mediatriz t do segmento DF_2 ;
- Construir a reta l passando por F_1 e D ;
- Com a ferramenta ponto de interseção obter o ponto P , interseção de t com l ;
- A elipse é o lugar geométrico dos pontos P quando D se move ao longo do círculo;
- Utilizar a ferramenta ativar traço para a mediatriz t e, de seguida, iniciar a animação que faz mover o ponto D ao longo do círculo. A imagem final está na Fig.4.9.

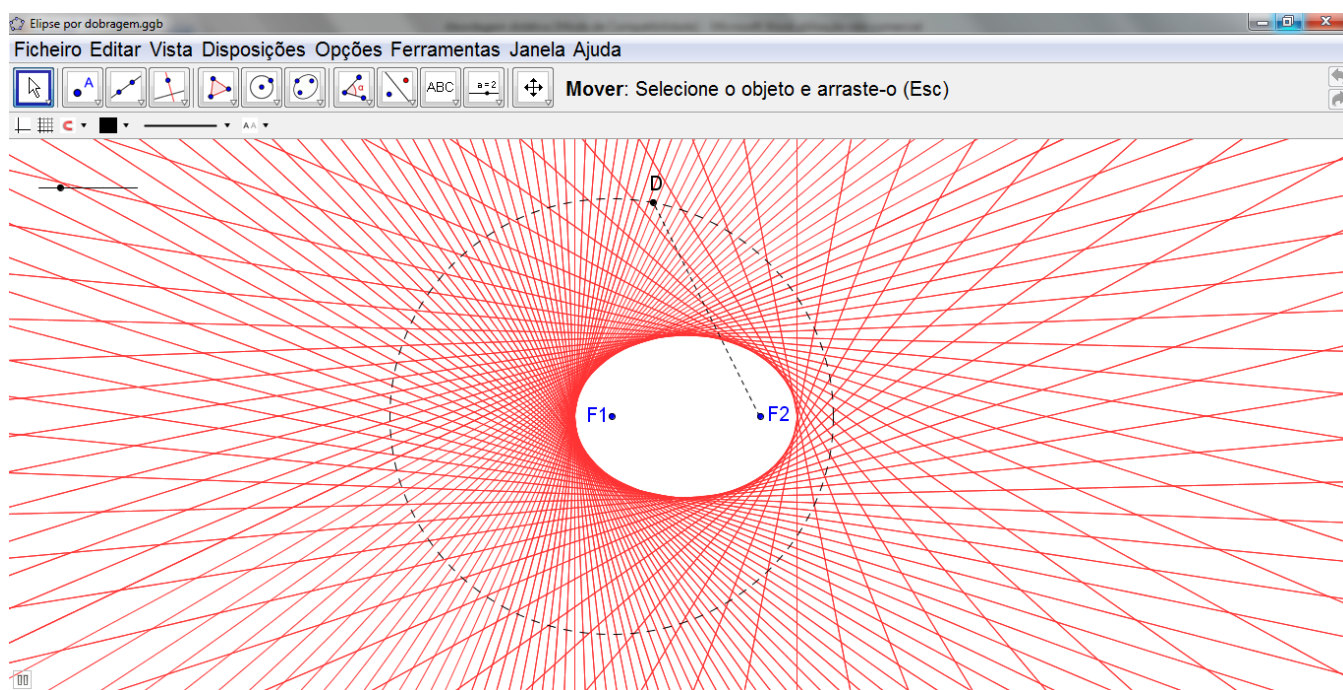


Fig.4.9 - Imagem da Elipse construída pelo método das dobragens (simulação em GeoGebra)

4.3.5.3. Construção da hipérbole

A construção da hipérbole é semelhante à da elipse. Passaremos diretamente aos procedimentos

para a simulação no *GeoGebra*:

- Construir dois segmentos de medidas $2a$ e $2c$ com $2a < 2c$;
- Construir uma reta r e um ponto F_1 sobre r ;
- Construir dois círculos concêntricos de centro F_1 com raios $2a$ e $2c$;
- Com a ferramenta ponto de interseção obter o ponto F_2 , interseção da reta r com círculo de raio $2c$;
- Utilizar a ferramenta ponto sobre objeto para marcar um ponto D sobre o círculo de raio $2a$;
- Construir a mediatriz t do segmento DF_2 ;
- Construir a reta l passando por F_1 e D ;
- Com a ferramenta ponto de interseção obter o ponto P , interseção de t com l ;
- A hipérbole é o lugar geométrico dos pontos P quando D se move ao longo do círculo;
- Utilizar a ferramenta ativar traço para a mediatriz t e, de seguida, iniciar a animação que faz mover o ponto D ao longo do círculo. A imagem final está na Fig.4.10.

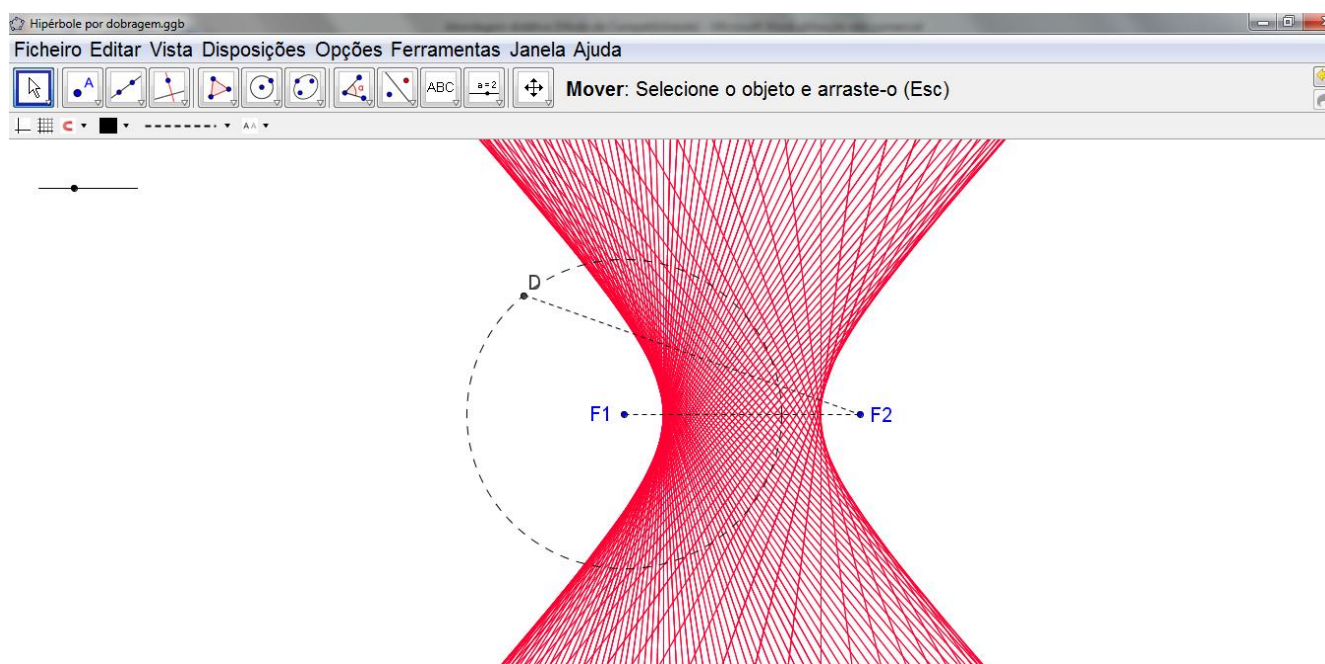


Fig.4.10 - Imagem da Hipérbole construída pelo método das dobragens (simulação em *GeoGebra*)

4.4. As aplicações das cónicas como valor motivacional para o ensino

Grande parte das aplicações das cónicas está associada às propriedades focais, traduzidas nas leis da reflexão que ocorre sempre que estamos perante superfícies cónicas de revolução resultantes da rotação dos três tipos de cónica em torno dos respetivos eixos (Fig.4.11).

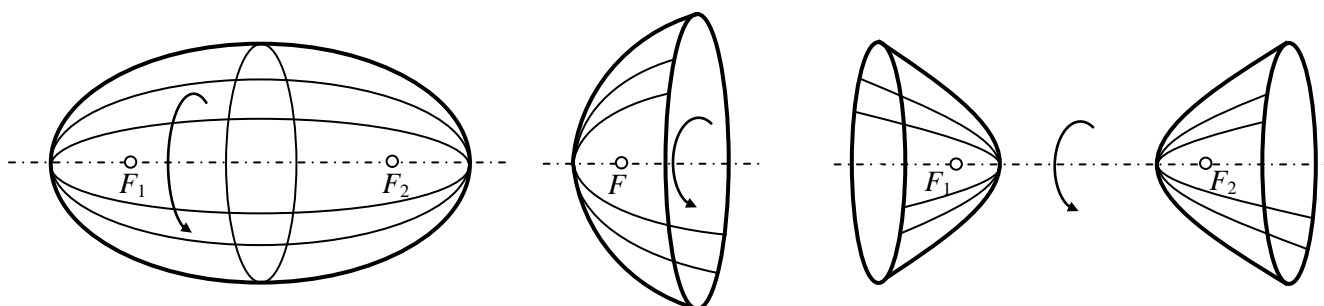


Fig.4.11 - Superfícies de revolução de uma cônica

Segundo as leis da física clássica, os raios de luz e as ondas sonoras propagam-se no espaço em linha reta e radialmente a partir de sua fonte. Além disso, se a fonte está muito distante de seu destino, essas ondas chegam ao destino formando um feixe praticamente paralelo, como é o caso das ondas de rádio ou as luminosas provenientes de um corpo celeste distante (estrela, galáxia, planetas, etc.).

As leis da reflexão da luz, quer numa superfície plana, quer numa superfície curva, podem enunciar-se do seguinte modo (Fig.4.12):

- (i) O raio de incidência r_i , a reta normal n e o raio de reflexão r_r são coplanares;
- (ii) O ângulo de incidência θ_i é igual ao ângulo de reflexão θ_r .

Posto isto, seguem-se as propriedades óticas das superfícies de revolução ilustradas na Fig.4.12:

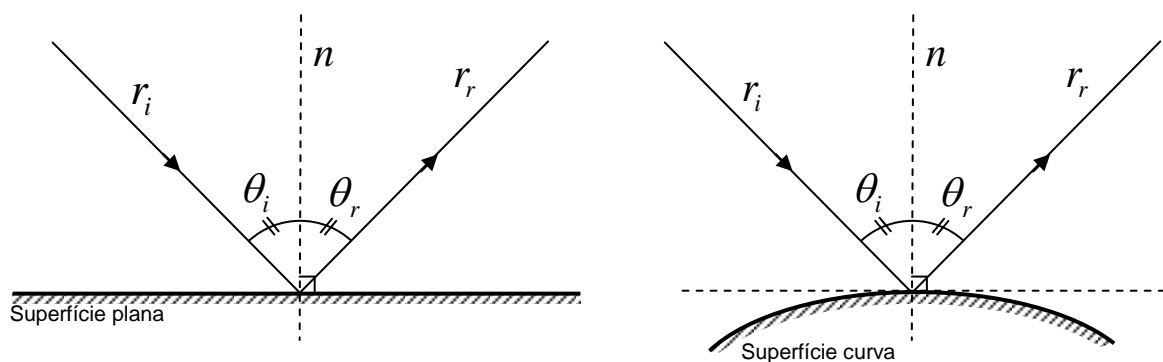


Fig.4.12 - Leis da reflexão da luz

Proposição 4.1 Se a fonte de luz estiver situada no foco de um espelho parabólico, todos seus raios refletidos serão paralelos ao eixo de simetria. Se os raios chegarem à superfície deste espelho, paralelamente ao eixo de simetria serão refletidos para o foco (Fig.4.13);

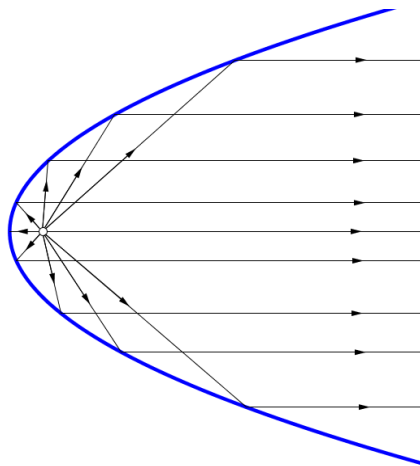


Fig.4.13 - Superfície refletora parabólica

Proposição 4.2. Se a fonte de luz estiver situada no foco de um espelho elíptico, todos os raios refletidos por este espelho se concentrarão no outro foco (Fig.4.14);

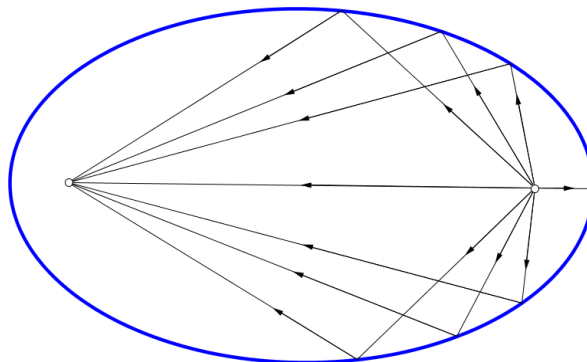


Fig.4.14 - Superfície refletora elíptica

Proposição 4.3. Se a luz for dirigida a um dos focos de um espelho hiperbólico será refletida em direção ao outro foco (Fig.4.15).

As propriedades refletoras são úteis em várias aplicações tecnológicas. Apresentamos algumas delas na próxima secção.

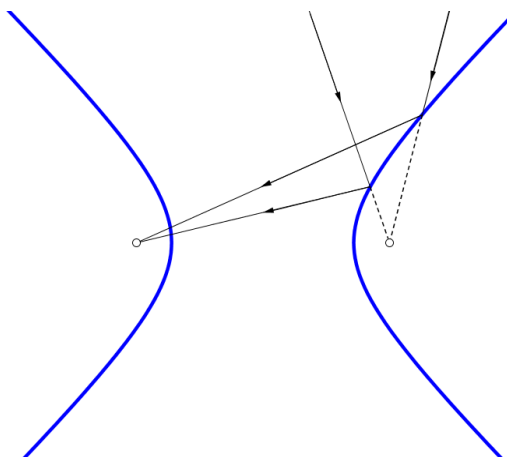


Fig.4.15 - Superfície refletora hiperbólica

4.4.1. Superfícies refletoras parabólicas

Pela proposição 4.1 observa-se que os raios de luz ao encontrarem um espelho parabólico convergirão para o foco deste espelho. Esta propriedade é aplicada nos coletores solares onde a temperatura no ponto focal pode chegar a 3500°C e, neste ponto, é colocado o dispositivo que irá recolher a energia concentrada. Essa energia pode ser usada para gerar eletricidade, derretimento de aço, fazer combustível de hidrogénio, ou nanomateriais. O maior forno solar do mundo está em Odeillo nos Pirinéus Orientais, em França, inaugurado em 1970 (Fig.4.16).



Fig.4.16 - Forno solar construído em França

O espelho parabólico é também usado em certos telescópios para refletir os raios de luz emitidos pelos corpos celestes para um outro espelho ou uma lente. Por exemplo, o telescópio Hale, do observatório no Monte Palomar na Califórnia possui o maior espelho côncavo do mundo. Os espelhos côncavos de qualquer telescópio são parabólicos, pois apresentam nitidez muito maior do que os espelhos côncavos esféricos quando se trata de imagens de objetos distantes.

Outros exemplos do uso de refletores parabólicos são os holofotes, faróis de automóveis e de motocicletas, onde a luz segue o caminho inverso, isto é, o feixe divergente que sai do foco torna-se paralelo após ser refletido, permitindo uma maior iluminação de objetos distantes. Temos ainda o comportamento de uma onda de rádio em relação a uma antena recetora parabólica, em tudo análogo ao comportamento da luz no espelho com esse mesmo formato, isto é, se estas ondas encontrarem a antena numa direção paralela ao seu eixo de simetria, serão refletidas na direção do aparelho que se encontra no foco desta antena.

4.4.2. Superfícies refletoras elípticas

Uma consequência da proposição 4.2 é que uma onda sonora ou luminosa que irradia do foco de uma superfície refletora elíptica reflete para o outro foco. Essa propriedade tem aplicação prática na construção de refletores odontológicos e em aparelhos de emissão de certos raios usados em

medicina. É o caso do espelho elíptico do Litotritor, um aparelho frequentemente usado para tratamento dos cálculos renais (popularmente chamados de pedra no rim). Nesse procedimento, as ondas de choque criadas fora do corpo pelo aparelho viajam através da pele e tecidos até encontrarem os calcos mais densos, pulverizando-os. O espelho elíptico concentra os raios emitidos num determinado ponto com grande precisão (Fig.4.17).

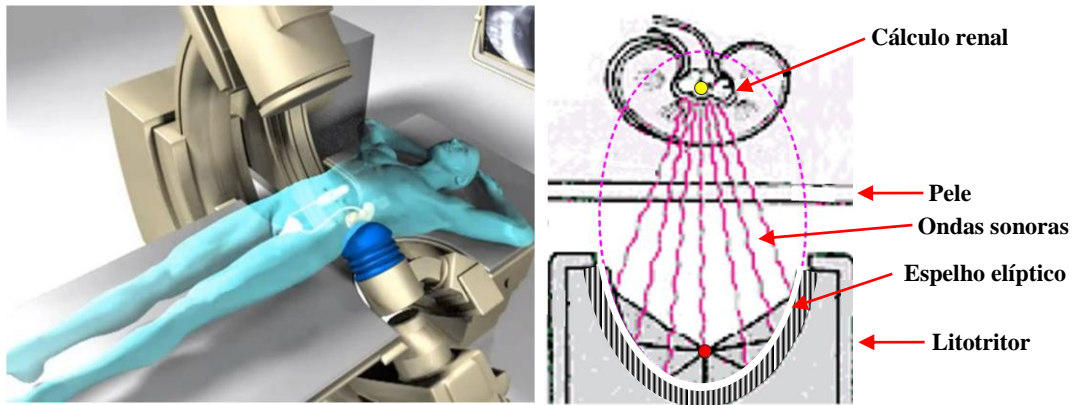


Fig.4.17 - Litotritor e espelho elíptico

Situação semelhante é a do sistema de iluminação dos dentistas usando refletores elípticos como forma de concentrar o máximo de luz num ponto específico dos dentes do paciente, evitando também o desconforto do encandeamento que os raios luminosos provocariam (Fig.4.18).

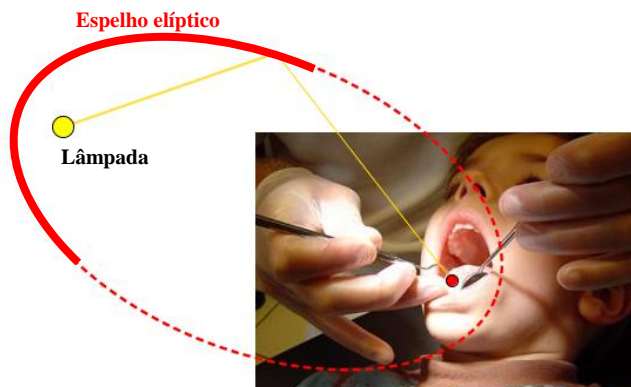


Fig.4.18 - Espelho elíptico no sistema de iluminação do dentista

Situação algo caricata foi a protagonizada pelo sexto presidente dos EUA, John Quincy Adams (1767-1848), enquanto membro da Câmara dos Representantes (Deputado). Tudo se passou na esplendorosa Statuary Hall (Salão estatuária) do Capitólio, em Washington D.C. quando Adams descobriu um estranho fenómeno acústico: sentado à mesa num determinado ponto do salão apercebeu-se das conversas de uma outra mesa situada num outro ponto distante do mesmo salão. O fenómeno veio a explicar-se com o facto do teto do salão ter a forma de um elipsoide, e cada uma das mesas estarem localizadas nos pontos focais do teto elíptico (Fig.4.19).

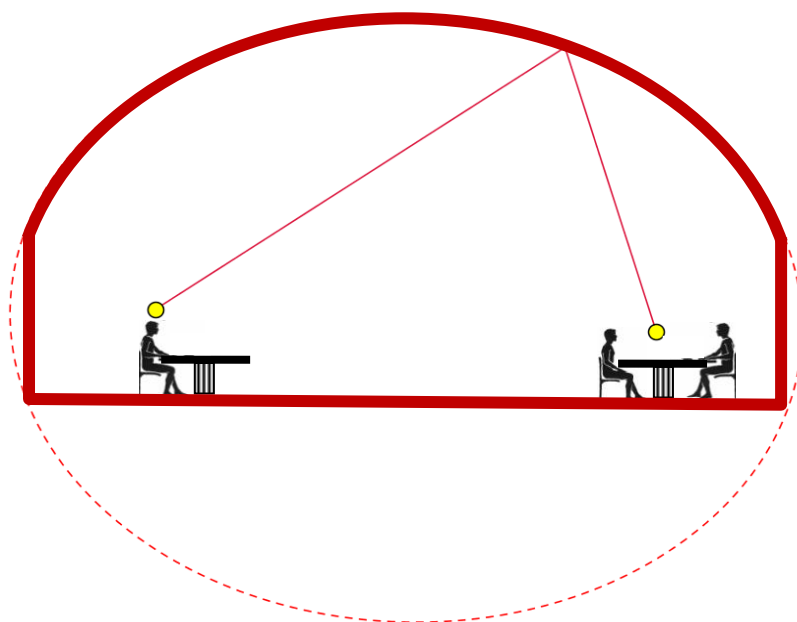


Fig.4.19 - Galeria dos murmúrios

Muitas construções, nomeadamente auditórios, teatros e catedrais, têm esta característica especial de acústica, pelo que se criou o mito das galerias dos murmúrios, isto é, salões projetados num formato parcial de elipsoide, de modo que existam dois pontos onde duas pessoas, uma em cada um desses pontos (focos do elipsoide), possam comunicar-se em sussurros, independentemente do ruído ambiente que haja ao redor. Um exemplo português é a sala do Teatro Nacional de S. Carlos. Como se pode observar pela planta da sala (Fig.4.20), a sua forma elíptica foi concebida de modo a que os respetivos focos se situassem no palco e na tribuna (lugar do rei), a fim de proporcionar uma acústica de qualidade na tribuna, para o rei e sua corte, claro!

4.4.3. Superfícies refletoras hiperbólicas

O espelho hiperbólico é também usado em telescópios, como um espelho secundário, ou seja, além do espelho parabólico principal. Sua importância está em redirecionar a luz do foco principal para um ponto mais conveniente, colocando-se um espelho refletor hiperbólico (posicionado sobre um dos ramos da hipérbole) com o seu foco coincidindo com o foco do espelho principal, conforme mostra a Fig.4.21. O objetivo é fazer com que a imagem, após ser refletida, seja formada na posição do foco do outro ramo da hipérbole. Notemos que a parábola e a hipérbole partilham o mesmo foco (F'). Essa construção foi proposta por Cassegrain em 1672 e várias montagens deste tipo são usadas no telescópio de Hale citado anteriormente.

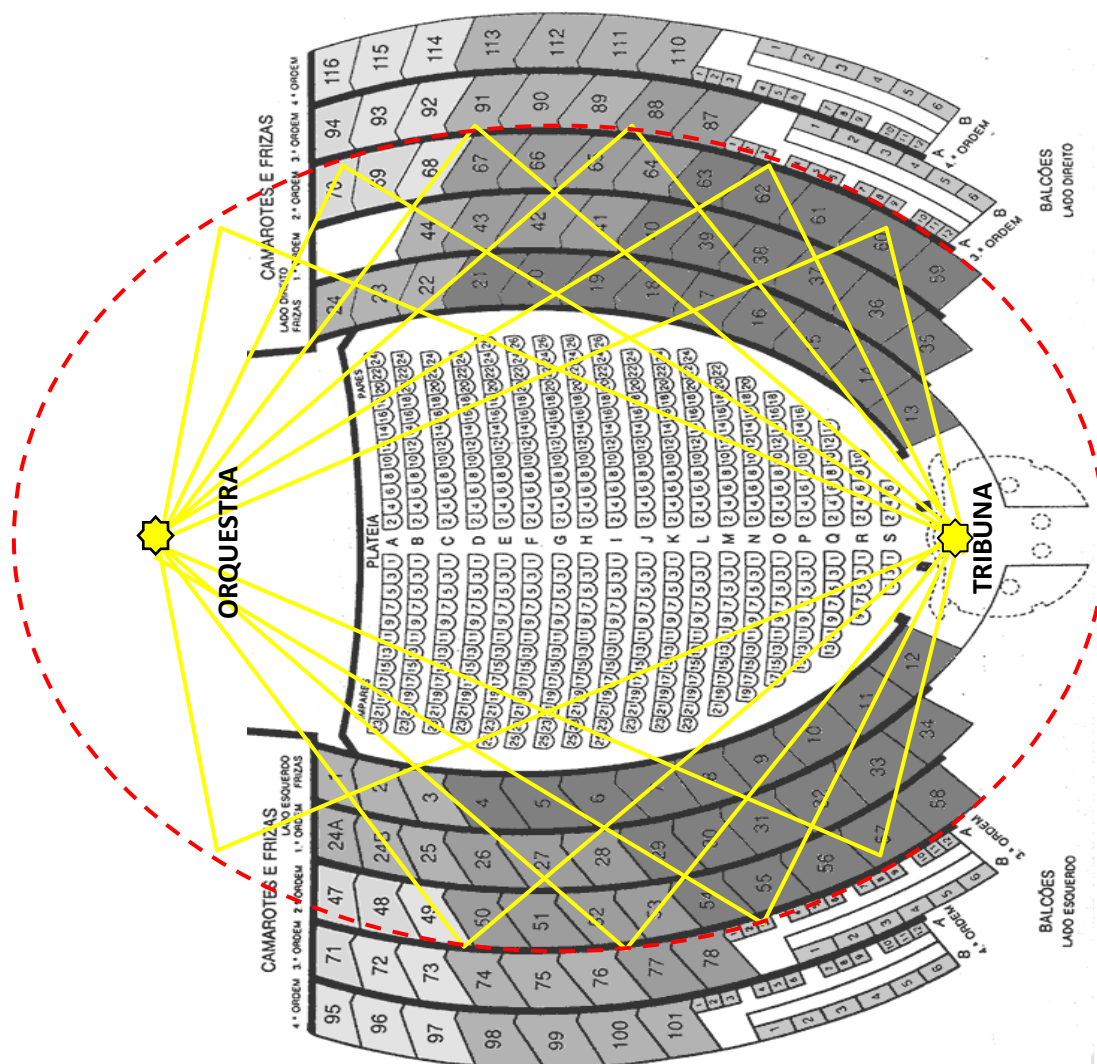


Fig.4.20 - Planta da sala do Teatro Nacional de S. Carlos

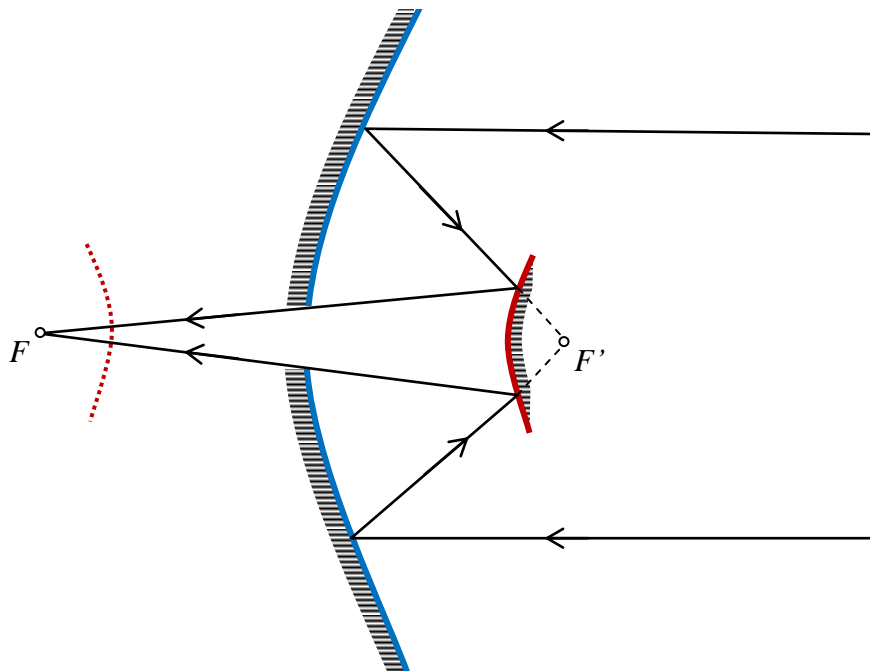


Fig.4.21 - Composição de um refletor parabólico-hiperbólico

4.4.4. A hipérbole e o Sistema LORAN de comunicações

O sistema **LORAN** (**LONG RANGE Navigation**) é um sistema que permite ao navegante de um navio ou avião localizar a sua posição sem recurso a marcos visíveis. Funciona a partir de emissões coordenadas de impulsos radioelétricos, de ondas médias ou curtas, enviados a partir de estações de rádio localizados em terra. Teve grande êxito durante a 2.^a guerra Mundial (altura em que sofreu grandes alterações na sua tecnologia). Em 1965 a NATO (North Atlantic Treaty Organization - Organização do Tratado do Atlântico Norte) instalou em Portugal quatro estações, em Sagres, Porto Santo, Santa Maria e Flores. Matematicamente falando, o sistema usa o conceito de lugar geométrico que define a hipérbole. Admitamos que uma embarcação numa posição P no Oceano Atlântico pretende determinar a sua localização (Fig.4.22). Para tal, capta sinais de rádio provenientes simultaneamente das estações de Sagres (F_1) e Porto Santo (F_2).

Na embarcação, medem o intervalo $\Delta t = t_2 - t_1$ entre o instante t_2 , instante de tempo em que recebem o sinal enviado de Porto Santo (F_2), e o instante t_1 , instante em que recebem o sinal de Sagres (F_1). Se T_1 é o intervalo de tempo que leva ao sinal emitido por Sagres (F_1) para alcançar a posição P da embarcação, e T_2 é o intervalo de tempo que leva ao sinal emitido de Porto Santo (F_2) para alcançar a posição do navegante, então a diferença (em módulo) entre a distância da posição P da embarcação a Sagres (F_1) e a distância da posição P da embarcação ao Porto Santo (F_2) é $|PF_1 - PF_2| = c\Delta t$, onde c é a velocidade do som no ar (o conceito de velocidade como

variação está ao alcance dos alunos do 9.º ano que estudam esta matéria na disciplina de Físico - Química). Ora, a equação $|PF_1 - PF_2| = c\Delta t$ representa uma hipérbole de focos F_1 e F_2 .

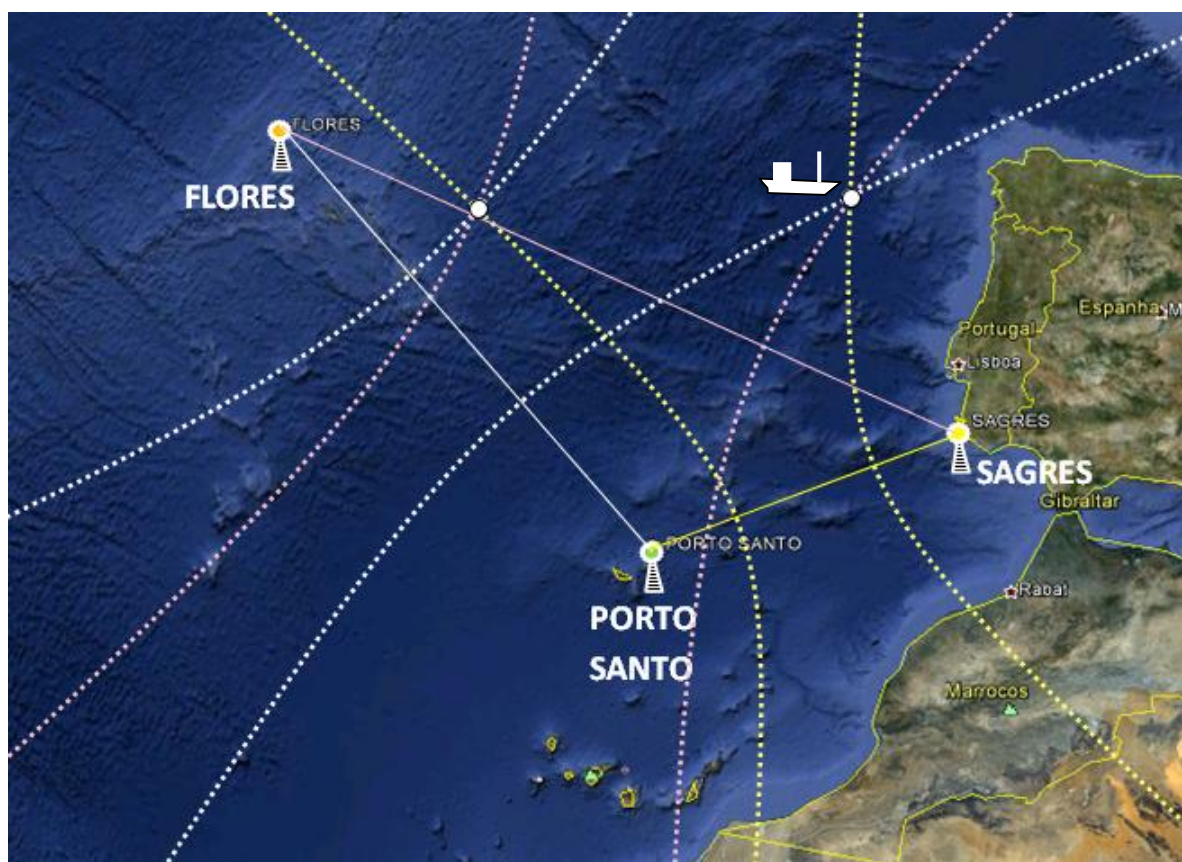


Fig.4.22 - Localização de uma embarcação pelo sistema LORIN de comunicações

Notemos que, embora na embarcação não possam medir T_1 e T_2 diretamente (por não saberem quando os sinais foram enviados), podem medir com precisão a diferença entre os instantes que os sinais foram recebidos, que é o suficiente para deduzir a equação do lugar geométrico do ponto P onde a embarcação se encontra, isto é, a hipérbole de equação $|PF_1 - PF_2| = c\Delta t$.

A embarcação pode determinar a sua localização se receber o sinal de uma terceira estação. Ao receber o sinal da estação das Flores (F_3), deduzem-se de forma análoga mais duas hipérboles, uma de focos F_1 e F_3 e outra de focos F_2 e F_3 . A interseção das três hipérboles permite discutir a localização exata da embarcação, uma vez que a cada par de estações está associada uma hipérbole que contém a posição P da embarcação.

4.5. Elaboração de um plano de aula para lecionar a matéria: Construção das cónicas pelo método das dobragens

Uma aula é um momento estruturado de trabalho no qual se desenrola o processo de ensino-aprendizagem. Esse processo envolve os sujeitos Professor e Alunos, um objeto de trabalho, um elemento de ligação entre os sujeitos – o conteúdo, e situações didáticas que permitam a ação conjunta e colaborativa entre os sujeitos e seu objeto de trabalho. Os planos de ação, nomeadamente a escolha de tarefas a propor aos alunos e a metodologia a utilizar, dependem da conceção que cada professor tem sobre o ensino da Matemática.

As características dos intervenientes no processo de ensino-aprendizagem são fundamentais para que a planificação seja adequada à realidade. Daí ser importante considerar respostas a questões do tipo:

- O que se pretende?
- A quem se dirige?
- Qual a duração?
- Que recursos utilizar?
- Como avaliar?

Finalizando esta breve introdução, importa referir que temos plena consciência do dinamismo inerente ao processo de ensino-aprendizagem e a sua incompatibilidade com planificações rígidas. Defendemos por isso, do ponto de vista docente, que toda a planificação deve ser suficientemente flexível, de modo a permitir a criatividade e a adaptação.

Passamos de seguida, à elaboração do plano começando pela Estrutura Curricular

Nível de ensino	Disciplina	Tema	Unidade didática
Secundário	Matemática	Geometria	Construção das cónicas pelo método das dobragens

Planificação da unidade didática: **Construção das cónicas pelo método das dobragens.**

Duração: 90 minutos.

Objetivos gerais

- Desenvolver a compreensão das linhas cónicas;
- Desenvolver a capacidade de manusear materiais manipuláveis;
- Desenvolver a capacidade de raciocinar matematicamente, conjecturando sobre e a partir de operações geométricas;
- Ser capaz de comunicar oralmente e por escrito recorrendo à linguagem corrente e à linguagem matemática interpretando, expressando e discutindo resultados, ideias e processos geométricos.

Metodologias

- Recorrer, quando conveniente, a exemplificações plásticas que envolvam dobragens;
- Utilizar recursos tecnológicos – por exemplo, computador para gerar imagens com softwares de geometria dinâmica;
- Criar oportunidades de diálogos para diversificar tipos de interação (professor-aluno, aluno-aluno, aluno-turma, professor-turma)

Tópicos	Objetivos específicos	Recursos
<ul style="list-style-type: none"> • Construção da mediatriz de um segmento de reta, pelo método da dobragem. 	Compreender o processo de obtenção da mediatriz de um segmento de reta, pelo método de dobragem.	<ul style="list-style-type: none"> • Folha de papel A4; • Régua e compasso; • Lápis e caneta; • Computador e <i>data show</i>; • <i>Software</i> de geometria dinâmica.
<ul style="list-style-type: none"> • Construção da parábola, da elipse e da hipérbole, pelo método de dobragem. 	Compreender as características e as propriedades de cada cônica.	

Avaliação

A avaliação deverá ocorrer durante o processo de construção das dobragens e na análise das características e propriedades de cada cônica.

Guião da aula:

Momento1 (Obter a mediatriz de um segmento de reta, pelo método da dobragem)

Pedir aos alunos para marcarem dois pontos (A e B) numa folha de papel dobrando-a de seguida, por forma a fazer coincidir os dois pontos (ver a sequência da Fig.4.24). Os alunos concluirão que o vinco resultante da dobragem é a mediatriz do segmento de reta AB .

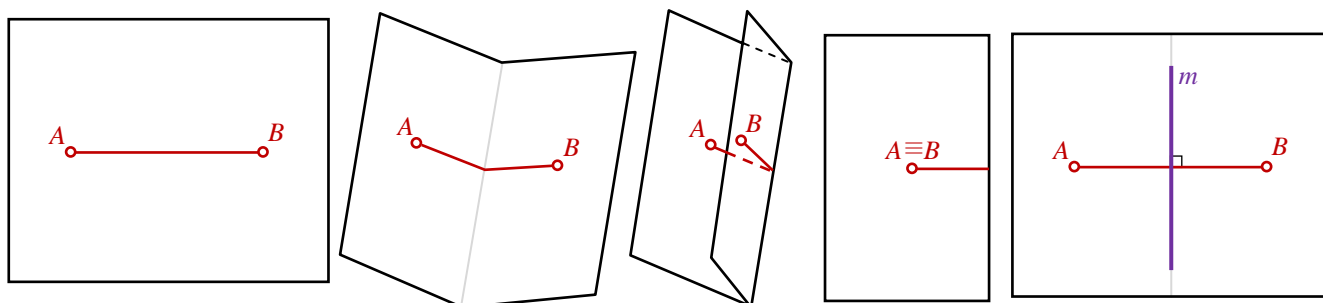


Fig.4.23 - Mediatriz de um segmento de reta por dobragem

Momento2 (Construção da parábola)

Recorrendo ao computador e a um *data show* o professor começa por exibir a Fig.4.7 gerada dinamicamente no *GeoGebra*. Os alunos terão de reproduzir a simulação que observaram usando os materiais adequados – Numa folha A4 (com boa transparência) desenharam um ponto F , uma reta d e vários pontos na reta d . A seguir efetuam dobragens da folha de modo a fazer coincidir cada ponto que representaram na reta d , com o ponto F . O resultado será uma imagem do tipo da Fig.4.25(p_1). Afirmarão que os vincos resultantes das dobragens envolvem uma parábola. Seguidamente, o professor desafia os alunos a analisarem e a discutirem a construção que obtiveram. Para auxiliar exibe a imagem da Fig.4.25(p_2) e formula a questão: O que representam os

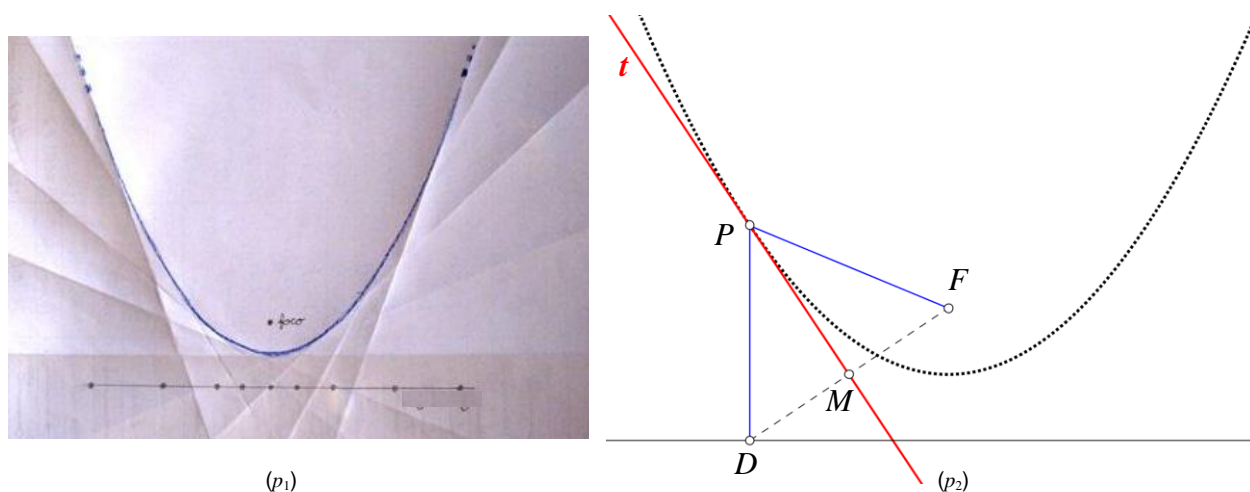


Fig.4.24 - Construção da parábola por dobragens, como atividade de aula

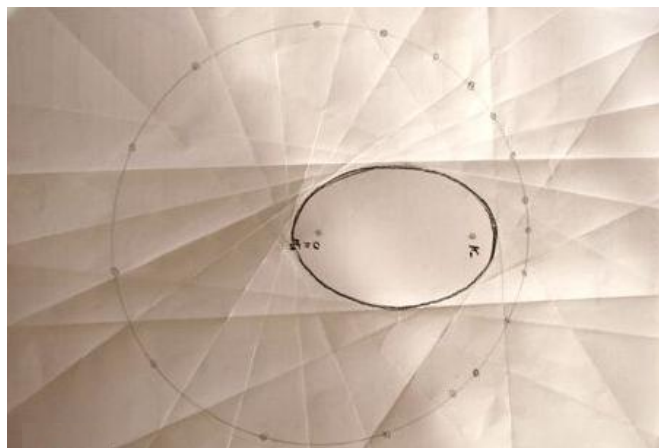
vincos de cada dobragem? Observando com atenção a Fig.4.25 (p_2) os alunos lembrar-se-ão que a reta t (um dos vincos no papel) é a mediatriz do segmento de reta DF , portanto M é ponto médio de DF e as distâncias PM e FM são iguais. Então pelo critério de congruência (LAL), podem afirmar que os triângulos PFM e PDM são congruentes e que, por isso, podem afirmar também que o segmento PD é congruente a PF . Concluirão facilmente que a igualdade $PD = PF$ é uma característica da parábola de foco F e diretriz d .

É importante que os alunos compreendam que a construção acima permitiu estabelecer uma definição da parábola.

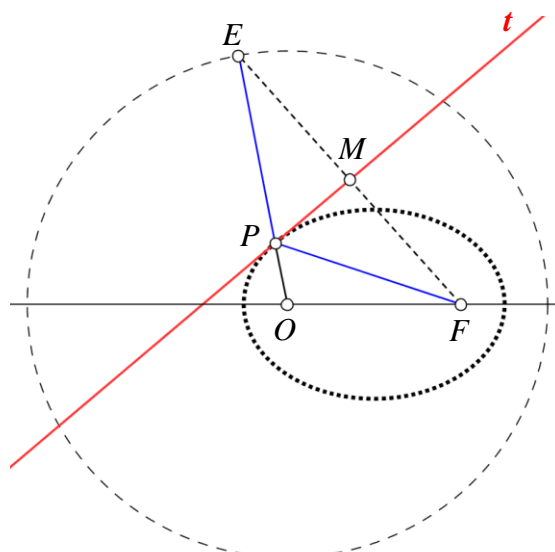
Momento3 (Construção da elipse)

O professor exibe a Fig.4.9 gerada dinamicamente no *GeoGebra*. Os alunos reproduzirão a simulação observada – Numa folha A4 (com boa transparência) desenharam uma circunferência de centro O , um ponto F no interior ($F \neq O$) e vários pontos na circunferência. A seguir efetuam dobragens da folha de modo a fazer coincidir cada ponto que representaram na circunferência, com

o ponto F . O resultado será uma imagem do tipo da Fig.4.26 (e_1). Dirão que os vincos resultantes das dobragens envolvem uma elipse.



(e_1)



(e_2)

Fig.4.25 - Construção da elipse por dobragens, como atividade de aula

O professor propõe a análise e discussão da construção obtida exibindo a imagem da Fig.4.26 (e_2). Com maior facilidade os alunos identificarão a reta t (um dos vincos no papel) como a mediatriz do segmento EF , com M o respetivo ponto médio. Pelo critério de congruência (LAL), podem afirmar que os triângulos EMP e FMP são congruentes e que portanto $EP = FP$. Deduzem daí (com algumas orientações do professor) que $OP + FP = OP + EP = r$ (raio da circunferência), pelo que $OP + FP = \text{constante}$.

Concluirão que $OP + FP = \text{constante}$ é uma característica da elipse de focos O e F .

Momento4 (Construção da hipérbole)

O professor exibe a Fig.4.10 gerada dinamicamente no *GeoGebra*, com os alunos reproduzirem a simulação observada – Numa folha A4 (com boa transparência) desenharam uma circunferência de centro O , um ponto F no exterior e vários pontos na circunferência. A seguir efetuam dobragens da folha de modo a fazer coincidir cada ponto que representaram na circunferência, com o ponto F . O resultado será uma imagem do tipo da Fig.4.27 (h_1). Os vincos resultantes das dobragens envolvem uma hipérbole.

Lembremos que nesta fase da aula os alunos já capitalizaram alguma experiência. Ao exibir a imagem da Fig.4.27 (h_2) é quase espontânea a identificação da reta t (um dos vincos no papel) como a mediatriz do segmento EF . Pelo critério de congruência (LAL), podem afirmar (quase mecanicamente) que os triângulos EMP e FMP são congruentes e que portanto $EP = FP$.

Deduzem daí (com provável hesitação e algumas dicas do professor) que $OP - FP = OP - EP = r$ (raio da circunferência), pelo que $OP - FP = \text{constante}$.

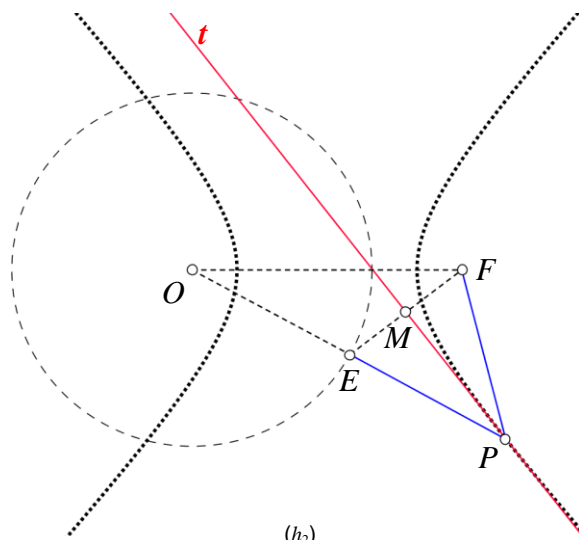
Concluirão assim, que $OP - FP = \text{constante}$ é uma característica da hipérbole de focos O e F .

Termina-se a aula resumindo as ideias essenciais das três atividades envolvendo as cónicas.

A estratégia das dobragens, explorando o lado lúdico da técnica, pode despertar o interesse dos alunos e motivá-los para o estudo das cónicas. A opção por essa estratégia e o respetivo plano de aula



(h_1)



(h_2)

Fig.4.26 - Construção da hipérbole por dobragens, como atividade de aula

justifica-se por razões de ordem prática – é de fácil execução e tem uma logística muito económica. Qualquer outra abordagem exposta ao longo das secções do capítulo 4 comportaria também o seu valor motivacional e estratégico na implementação de um plano aula. Podíamos optar por uma proposta de atividade que envolvesse a construção de fornos solares (propriedade refletora da parábola), podíamos optar por uma visita de estudo ao Teatro Nacional de S. Carlos para investigar, in loco, o fenómeno acústico da galeria dos murmúrios da sala, podíamos optar ainda, já numa perspetiva interdisciplinar (com a colaboração dos professores de Físico-química e de Geografia), por investigar a estrutura ótica do telescópio Hale (na composição dos espelhos parabólicos e hiperbólicos) aproveitando para “espreitar”, no âmbito da astronomia, o sistema de orbitas dos planetas e cometas.

Epílogo

A concretização desta tese, na sua globalidade, superou consideravelmente as expectativas, pelo fluxo aparentemente inesgotável de informações que a vasta bibliografia proporcionou. Ficou por abordar as Leis de Kepler que segundo Jennings (1994, p.101) destacaria o estudo das órbitas elípticas dos planetas, onde teríamos a oportunidade de evidenciar a importância das equações das cónicas no sistema de coordenadas polares. Por tudo que foi tratado nas quatro abordagens subscrevemos sem pejo, a reação que o comum dos leitores teria: «Quem haveria de dizer que o velho senhor tinha tanto sangue dentro de si?».

Bibliografia

- [1] Auffinger, A. e Valentim, F., *Introdução à Geometria Projetiva*, Universidade Federal do E. Santo Departamento de Matemática, Brasil, 2003
<http://www.dma.ufv.br/downloads/MAT%20350/2012-I/Texto6%20-%20MAT%20350%20-%202012-I.pdf>
- [2] Araújo P. V., *Curso de Geometria*, Gradiva, Lisboa 2002.
- [3] Apostol, T. M., *Cálculo (Volume 1)*, Editora Reverté, Ltda, Espanha, 1983.
- [4] Boyer, C. B., *História da Matemática*, Editora Edgard Blücher Ltda, S. Paulo, 1974
- [5] Comenius, J. A., *Didática Magna*, (Versão para eBook)
Fundação Calouste Gulbenkian, 2001
<http://www.ebooksbrasil.org/adobeebook/didaticamagna.pdf>
- [6] Coolidge, J. L., *A history of the conic sections and quadric surfaces*, Oxford, 1945.
- [7] Courant, R. e Robbins, H., *What is Mathematics*, Oxford, 1941.
- [8] Coxeter, H. S. M., *Projective Geometry*, Springer, New York, 1987
- [9] Hartung, G., *Construção das Cônicas por Dobragens*, Petropolis, 2010
<http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=27219>
- [10] Hogendijk, J. P., *Desargues' Brouillon Project and the Conics of Apollonius*, Centaurus 1991: vol. 34 pp. 1-43, Utrecht, Holland,
<http://www.jphogendijk.nl/publ/Desargues2.pdf>.
- [11] Jennings, G. A., *Modern Geometry with Applications*, Springer, New York, 1994.
- [12] Katz, V. J., *História da Matemática*, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 2010.
- [13] Kindle, J. H., *Geometria Analítica*, Editora McGraw-Hill do Brasil, 1959.
- [14] Lopes, J. F., *Cônicas e Aplicações*, Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Brasil, 2011.
<http://pt.scribd.com/doc/74716925/Juracelio-Ferreira-Lopes>
- [15] Maria Estrada, Carlos Sá, João Queiró, Maria do Céu Silva, Maria José Costa
Historia da Matemática, Universidade Aberta, 2000.
- [16] Sá, C., *História da Geometria Projetiva*, Manuscrito, Universidade de Coimbra
(1.º Encontro Luso-Brasileiro sobre História da Matemática) 1993.
- [17] Sato, J., *As Cônicas e sua Aplicações*, FAMAT, Universidade Federal de Uberlândia, Brasil, 2004. <http://www.sato.prof.ufu.br/Conicas/>

- [18] Souza, J. R., *Transformações projetivas planas. Cónicas. Elipse central dum sistema de forças paralelas*, Faculdade de Ciências do Porto, 1952.
- [19] Veloso, E., *Geometria - Temas Atuais*, Instituto de Inovação Educacional, Lisboa 1998.
- [20] Viapiana, N., *Palestra sobre o Educador Comenius*, 1ª Semana da Reeducação Consciencial realizada pela Reaprendentia, 2012.
<http://www.youtube.com/watch?v=uBSUMRs5x0U>
- [21] Wildberger, N. J., *ElemMath 11 (K-6) Explained: Elementary projective (line) geometry*
<http://www.youtube.com/watch?v=gc82DL4vB8o>, 2012
- [22] Wildberger, N. J., *WT41: Conics via projective geometry*.
<http://www.youtube.com/watch?v=o8G6pmGSIVw>, 2009

Outras fontes

- [23] *Conic Sections-Darkness* <http://www.youtube.com/watch?v=SKNybVUuPXA>
- [24] *Didática* <http://pt.wikipedia.org/wiki/Did%C3%A1tica>
- [25] *Imagem do Litotritor; Imagem do forno solar em Odeillo -França; Imagem do Edifício do Capitólio – Washington D.C.*
https://www.google.pt/?qws_rd=cr&ei=LG7FUqL3DoavygPdxYDoAg
- [26] O Universo Matemático, *Geometria Projetiva – A invariância frente à projeção*, Revista Jogos de Engenho, Orbis Fabbri e RBA, 2006.